Η ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ

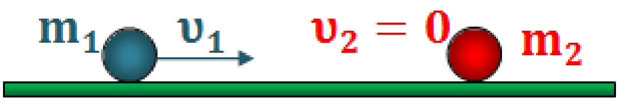
ΘΕΜΑ

Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα υ_1 στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Η σφαίρα συγκρούεται ακαιριαία και κεντρικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2.

Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_2 αποκτά ταχύτητα

$$\upsilon'_2 = \frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1+m_2} \quad (1)$$

όπου $1 \leq \lambda \leq 2$.



Να αποδειχθεί ότι αν η κεντρική κρούση είναι:

Α) πλαστική τότε $\lambda = 1$

Β) ελαστική τότε $\lambda = 2$

Γ) ανελαστική μη πλαστική τότε $1 < \lambda < 2$ και

Απόδειξη

Ξεκινώντας με την εφαρμογή της Α. Δ. Ο. έχουμε:

$$P_{ΑΡΧ} = P_{ΤΕΛ} \Leftrightarrow p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon'_1 + \frac{\lambda m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \Leftrightarrow \upsilon'_1 = \frac{m_1+(1-\lambda)m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (3)$$

Α) Έστω ότι η κρούση είναι πλαστική. Τότε:

$$\upsilon'_1 = \upsilon'_2 \Leftrightarrow \frac{m_1+(1-\lambda)m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{\lambda m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \Leftrightarrow m_1+(1-\lambda)m_2 = \lambda m_1 \Leftrightarrow$$
$$(1-\lambda)(m_1+m_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Β) Έστω ότι η κρούση είναι ελαστική. Τότε από τους γνωστούς τύπους έχουμε:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (4) \quad \text{και} \quad \upsilon'_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \quad (5)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\frac{m_1+(1-\lambda)m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Leftrightarrow m_1+(1-\lambda)m_2 = m_1-m_2 \Leftrightarrow$$
$$(2-\lambda)m_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Γ) Έστω ότι η κρούση είναι ανελαστική μη πλαστική. Τότε:

$$K_{APX} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1{}^2 (6)$$

$$K_{TE\Lambda} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon'_2{}^2$$

$$\Leftrightarrow K_{TE\Lambda} = \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{m_1 + (1-\lambda) m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow K_{TE\Lambda} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1{}^2 \left[\left[\frac{m_1 + (1-\lambda) m_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \left[\frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}\right]^2\right]$$

$$\Leftrightarrow K_{TE\Lambda} = K_{APX} \left[\left[\frac{m_1 + (1-\lambda) m_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \left[\frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}\right]^2\right] (7)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_{TE\Lambda} - K_{APX}$$

$$\Leftrightarrow \Delta K = K_{APX} \left[\left[\frac{m_1 + (1-\lambda) m_2}{m_1 + m_2}\right]^2 + \left[\frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}\right]^2 - 1\right] (8)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην σχέση (8):

$$\Delta K = K_{APX} \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\lambda^2 - 2\lambda)\ (9)$$

Εφόσον η κρούση είναι ανελαστική:

$$\Delta K < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 2\ (10)$$

Επιπλέον θα πρέπει:

$$\upsilon'_2 > \upsilon'_1 \Leftrightarrow \frac{\lambda m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2} > \frac{m_1 + (1-\lambda) m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1$$

$$\Leftrightarrow \lambda m_1 > m_1 + (1-\lambda) m_2 \Leftrightarrow (1-\lambda)(m_1 + m_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1\ (11)$$

Συναληθεύοντας τις σχέσεις (10) και (11): $1 < \lambda < 2$

Συνοψίζοντας μπορούμε να γράψουμε:

$$\text{Αν η κρούση :} \begin{cases} \text{είναι πλαστική τότε } \lambda = 1 \\ \text{είναι ελαστική τότε } \lambda = 2 \\ \text{ανελαστικη τότε } 1 < \lambda < 2 \end{cases}$$