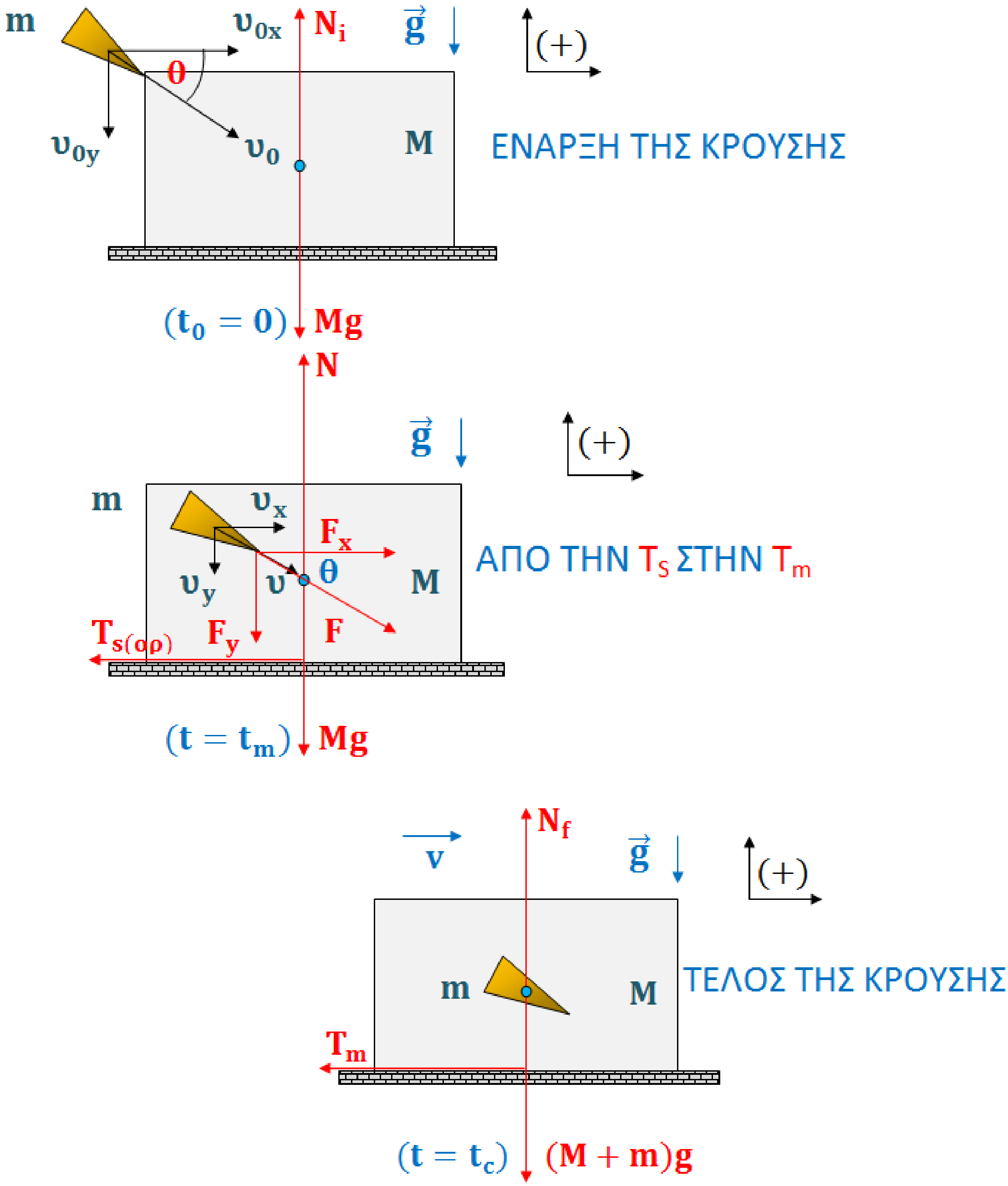
Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΤΗΝ ΠΛΑΓΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

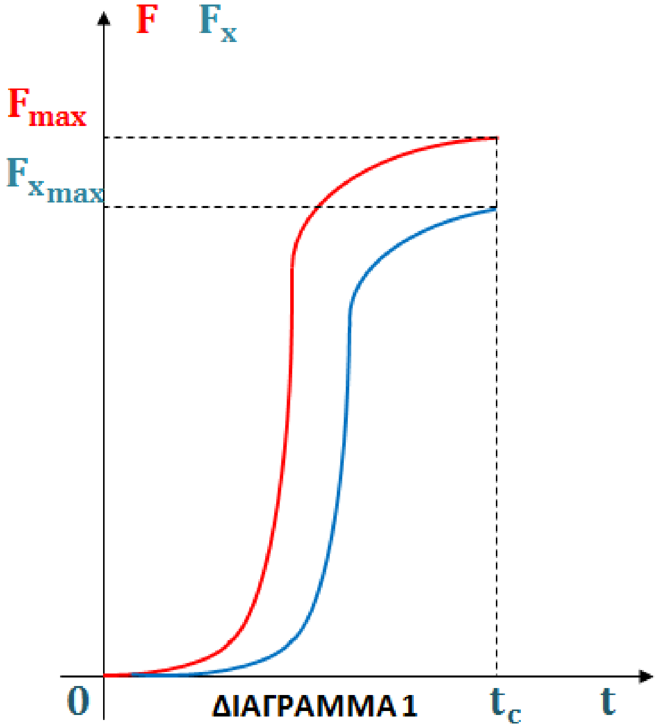
Α) Το φαινόμενο και η περιγραφή του

Μικρό βλήμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, συγκρούεται πλάγια και πλαστικά με το σώμα μάζας M που είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα μάζας M παρουσιάζει με το οριζόντιο επίπεδο συντελεστή στατικής τριβής μ_s και συντελεστή τριβής ολίσθησης μ.

Το φαινόμενο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ολοκληρώνεται τη χρονική στιγμή $t = t_c$. Η εκκίνηση του σώματος μάζας M γίνεται μια ενδιάμεση χρονική στιγμή $t = t_m$, δηλαδή $0 < t_m < t_c$.



Το διάγραμμα 1 δείχνει πώς μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ και της οριζόντιας συνιστώσας της $\vec{F}_x$ που είναι υπεύθυνη για το αν το σώμα μάζας M τελικά θα αρχίσει να κινείται.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1

Β) Μαθηματική περιγραφή του φαινομένου

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ώθησης-ορμής για το σύστημα των σωμάτων στη διεύθυνση:

$$y'y: \vec{P}_f = \vec{P}_i + \Sigma\vec{\Omega} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{P}_i + \vec{\Omega}_{mg} + \vec{\Omega}_{Mg} + \vec{\Omega}_N \Leftrightarrow$$

$$0 = -m\upsilon_0 \eta\mu\theta - |\vec{\Omega}_{mg}| - |\vec{\Omega}_{Mg}| + |\vec{\Omega}_N| \ (1)$$

Όμως $|\vec{\Omega}_{mg}| + |\vec{\Omega}_{Mg}| << |\vec{\Omega}_N|$, άρα η (1) μπορεί να γραφεί:

$$|\vec{\Omega}_N| = m\upsilon_0 \eta\mu\theta \text{ ή } \int_0^{t_c} N\, dt = m\upsilon_0 \eta\mu\theta \ (2)$$

Παρατήρηση:

Βλέπουμε ότι η ώθηση της δύναμης $\vec{N}$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου t_c.

$$x'x: \vec{P}_f = \vec{P}_i + \Sigma\vec{\Omega} \Leftrightarrow \vec{P}_f = \vec{P}_i + \vec{\Omega}_{T_s} + \vec{\Omega}_{T_m},$$

όπου $\vec{\Omega}_{T_s}$ και $\vec{\Omega}_{T_m}$ οι ωθήσεις της στατικής τριβής $\vec{T}_s$ και τριβής ολίσθησης $\vec{T}_m$ αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη τις φορές των διανυσμάτων μπορούμε να γράψουμε:

$$(m + M)v = m\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta - |\vec{\Omega}_{T_s}| - |\vec{\Omega}_{T_m}| \Leftrightarrow$$

$$(m + M)v = m\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta - \int_0^{t_m} T_s\, dt - \int_{t_m}^{t_c} T_m\, dt \ (3)$$

Παρατήρηση:

Βλέπουμε ότι ενώ το άθροισμα των ωθήσεων στατικής τριβής $\vec{T}_s$ και τριβής ολίσθησης $\vec{T}_m$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου t_c, εντούτοις κάθε ώθηση εξαρτάται από τη στιγμή t_m της εκκίνησης του σώματος μάζας M.

Σε όλη τη διάρκεια της κρούσης το σώμα μάζας M ισορροπεί στην διέυθυνση $y'y$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow$$

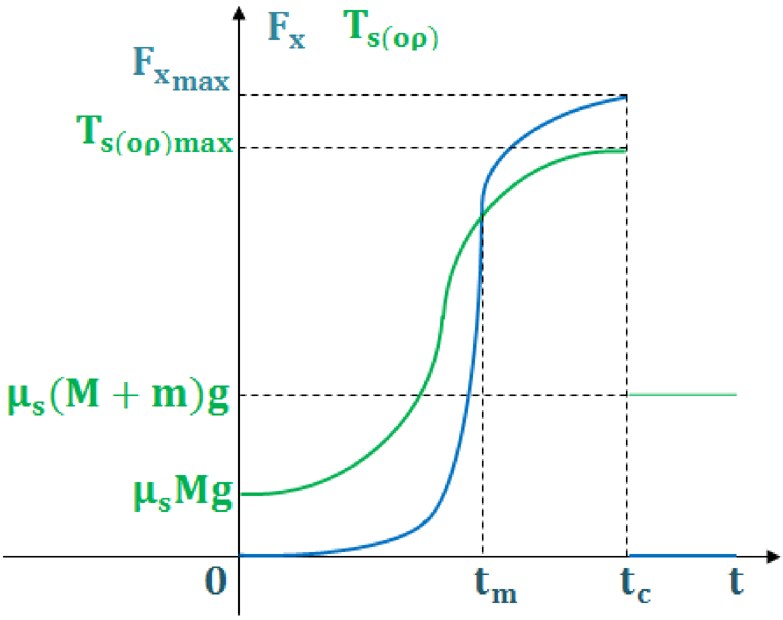
$$N = Mg + F\eta\mu\theta \ (4)$$

Άρα για το μέτρο της οριακής στατικής τριβής θα ισχύει:

$$T_{s(o\rho)} = \mu_s N \Leftrightarrow$$

$$T_{s(o\rho)} = \mu_s(Mg + F\eta\mu\theta) \ (5)$$

Το διάγραμμα 2 δείχνει τη μεταβολή των μέτρων της οριζόντιας συνιστώσας της $\vec{F}_x$ της δύναμης $\vec{F}$ και της οριακής στατικής τριβής $\vec{T}_{s(o\rho)}$ σε συνάρτηση με τον χρόνο.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2

α) Για $0 \leq t \leq t_m$ η τριβή είναι στατική $\vec{T}_s$, $F_x \leq T_{s(o\rho)}$ και η ταχύτητα του βλήματος από $\vec{\upsilon}_0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, γίνεται $\vec{\upsilon}$ τη χρονική στιγμή $t = t_m$. Από το θεώρημα ώθησης-ορμής στο διάστημα αυτό είναι:

$$m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta = m\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\theta - |\vec{\Omega}_{T_s}| \Leftrightarrow |\vec{\Omega}_{T_s}| = m(\upsilon_0 - \upsilon)\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{t_m} T_s\, dt = m(\upsilon_0 - \upsilon)\sigma\upsilon\nu\theta \ (6)$$

Παρατήρηση: Από τη σχέση (6) βλέπουμε ότι όσο πιο πολύ καθυστερεί η εκκίνηση του σώματος μάζας $\mathbf{M}$ τόσο μεγαλύτερη είναι η μείωση της οριζόντιας ορμής του βλήματος και κατ' επέκταση του συστήματος.

β) Για $\mathbf{t_m < t \leq t_c}$ η τριβή είναι τριβή ολίσθησης $\vec{\mathbf{T}}_\mathbf{m}$ και $\mathbf{F_x > T_{s(o\rho)}}$. Η ταχύτητα του βλήματος συνεχίζει να μειώνεται ενώ του σώματος μάζας $\mathbf{M}$ αρχίζει να αυξάνεται. Τελικά τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_c}$ τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ και η κρούση ολοκληρώνεται.

Από το θεώρημα ώθησης-ορμής στο διάστημα αυτό είναι:

$$\mathbf{(m+M)v = m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta - \left|\vec{\Omega}_{T_m}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\Omega}_{T_m}\right| = m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta - (m+M)v \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\int_{t_m}^{t_c} T_m dt = m\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta - (m+M)v \ (7)}$$

Παρατήρηση: Από τη σχέση (7) βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ώθηση $\vec{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{T_m}}$ τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ του συσσωματώματος. Αντίθετα αν $\mathbf{t_m \to t_c}$, τότε:

$$\mathbf{\int_{t_m}^{t_c} T_m dt \to 0 \Leftrightarrow v \to \frac{m}{m+M}\upsilon\sigma\upsilon\nu\theta \ (8)}$$

Γ) Συνθήκη της εκκίνησης: Η τιμή του συντελεστή στατικής τριβής $\mathbf{\mu_s}$ και η σχέση του με τη γωνία $\mathbf{\theta}$.

Ας δούμε τώρα πού θα μας οδηγήσει η συνθήκη εκκίνησης του σώματος μάζας $\mathbf{M}$ δηλαδή η σχέση:

$$\mathbf{F_x > T_{s(o\rho)} \Leftrightarrow F\sigma\upsilon\nu\theta > \mu_s(Mg + F\eta\mu\theta) \Leftrightarrow F(\sigma\upsilon\nu\theta - \mu_s\eta\mu\theta) > \mu_s Mg}$$

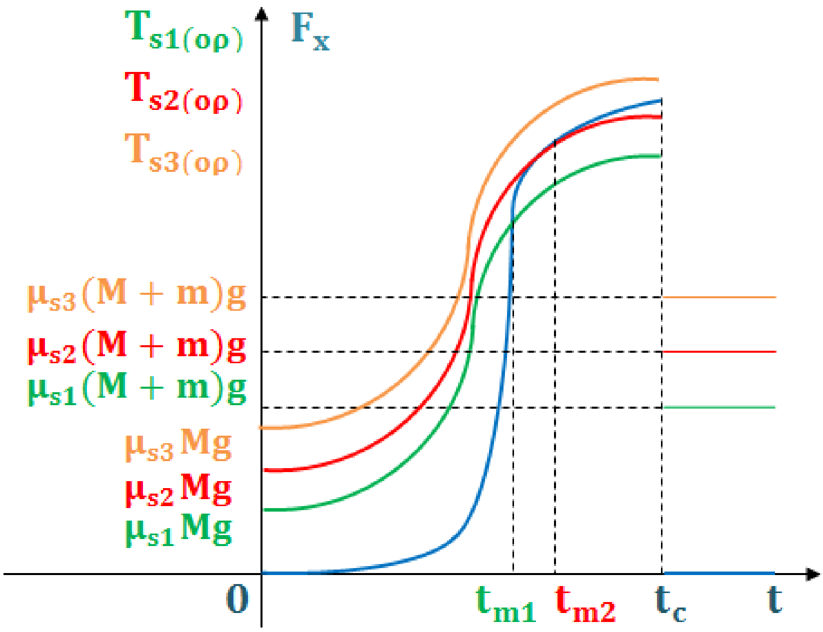
Η τελευταία σχέση έχει νόημα μόνο όταν:

$$\mathbf{\sigma\upsilon\nu\theta - \mu_s\eta\mu\theta > 0 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\mu_s < \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \ (9)}$$

Παρατήρηση: Από τη σχέση (9) βλέπουμε ότι αν η γωνία $\mathbf{\theta}$ είναι μεγάλη η εκκίνηση του σώματος μάζας $\mathbf{M}$ είναι δυνατή για μικρές τιμές του συντελεστή στατικής τριβής $\mathbf{\mu_s}$.

Το διάγραμμα 3 δείχνει τη μεταβολή των μέτρων της οριζόντιας συνιστώσας της $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{x}$ της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}$ και της οριακής στατικής τριβής $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{s(o\rho)}}$ σε συνάρτηση με τον χρόνο για διάφορες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής $\mathbf{\mu_s}$.



Παρατηρήσεις:

1)Με την αύξηση του συντελεστή στατικής τριβής μ_s είναι $t_m \rightarrow t_c$, οπότε η μείωση της οριζόντιας ορμής του βλήματος άρα και του συστήματος αυξάνει.

2)Όταν η τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ_s ξεπεράσει κάποια τιμή δεν υπάρχει η χρονική στιγμή t_m και το συσσωμάτωμα ποτέ δεν κινείται.

3)Πηγή διαγραμμάτων www.tf.uni-kiel.de

Δ) Τελικό συμπέρασμα. Τι μας λένε όλα τα παραπάνω;

<u>Η οριζόντια ορμή του συστήματος διατηρείται απόλυτα μόνο όταν το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο</u>.

Στην περίπτωση αυτή:

α)$t_m = 0$, δηλαδή μόνο τότε το συσσωμάτωμα αρχίζει αμέσως να κινείται.

β)$\mu_s = 0 \Rightarrow \vec{T}_s = \vec{0} \Rightarrow \int_0^{t_m} T_s\, dt = 0$

γ)$\mu_m = 0 \Rightarrow \vec{T}_m = \vec{0} \Rightarrow \int_{t_m}^{t_c} T_m dt = 0$

δ) Από τη σχέση (3): $(m + M)v = m\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta$ **Α.Δ.Ο.**

ΝΙΚΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΑ 2023

ΧΡΟΝΙΑ ΠΟΛΛΑ ΚΑΙ ΕΥΤΥΧΙΣΜΕΝΑ