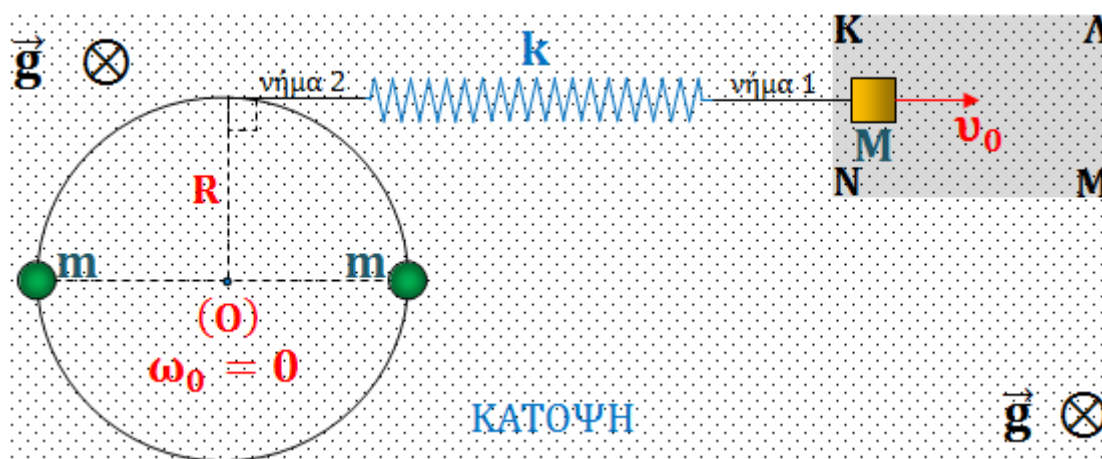


ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας M είναι αρχικά ακίνητο πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο ΚΛΜΝ. Το σώμα αυτό είναι δεμένο στο αβαρές και μη εκτατό νήμα 1, το άλλο άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο στο δεξιό άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$.

Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται αρχικά ακίνητος αβαρής δακτύλιος ακτίνας $R = 0,5 \text{ m}$ στα άκρα μιας διαμέτρου του οποίου έχουν στερεωθεί δυο σφαιρίδια μικρών διαστάσεων μάζας $m = 1 \text{ kg}$ το καθένα. Στο δακτύλιο που μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του (O) έχει τυλιχθεί το αβαρές και μη εκτατό νήμα 2 το άλλο άκρο του οποίου έχει συνδεθεί στο άλλο άκρο του ελατηρίου. Ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με των νημάτων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Κάποια χρονική στιγμή t_0 εκτοξεύουμε το σώμα μάζας M με ταχύτητα μέτρου $u_0 = 10 \text{ m/s}$ παράλληλα στον άξονα του ελατηρίου, με συνέπεια να αρχίσει να επιβραδύνεται, το ελατήριο να επιμηκύνεται και το σύστημα δακτύλιος-σφαιρίδια να επιταχύνεται από την ηρεμία.

Τη στιγμή t_1 που η ταχύτητα του σώματος μάζας M μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος όλων των σωμάτων έχει μειωθεί κατά 50% σε σχέση με χρονική στιγμή t_0 .

Δ1. Να υπολογιστεί η μάζα M .

Δ2. Να βρεθεί η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογιστούν:

Δ3. Η γωνιακή ταχύτητα των σφαιριδίων.

Δ4. Η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Δ5. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος δακτύλιος – σφαιρίδια, ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο (O) του δακτυλίου.

Λύση:

- Δ1.** Το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο από εξωτερικές ροπές ($\Sigma \tau_{\text{εξ}} = 0$). Άρα η στροφορμή του διατηρείται.
Συνεπώς:

$$L_0 = L \Leftrightarrow Mv_0R = 2mvR \Leftrightarrow Mv_0 = 2mv \Leftrightarrow v = \frac{Mv_0}{2m} \quad (1)$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος στο χρονικό διάστημα $t_0 \rightarrow t_1$ είναι -50%.

Άρα

$$\frac{\Delta K_0}{K_0} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow K_0 = 2K \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 = 2\frac{1}{2}mv^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} M = m \Leftrightarrow \mathbf{M = 1kg}$$

- Δ2.** Το ελατήριο έχει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια όταν η ταχύτητα του σώματος μάζας M είναι ίση κατά μέτρο με την γραμμική ταχύτητα των σφαιριδίων.

Α.Δ. Στροφορμής:

$$L_0 = L \Leftrightarrow Mv_0R = MvR + 2mvR \stackrel{M=m}{\Leftrightarrow} v_0 = 3v \Leftrightarrow v = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή αφού η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική.

Α.Δ.Μ.Ε.:

$$E_0 = E \Leftrightarrow K_0 = K + U_{\text{max}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{1}{2}mv^2 + U_{\text{max}} \Leftrightarrow \mathbf{U_{\text{max}} = \frac{100}{3} \text{ J}}$$

- Δ3.** Από τη σχέση (1) για την ταχύτητα των σφαιριδίων τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$v = \frac{Mv_0}{2m} \Leftrightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

Όμως

$$v = \omega R \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R} \Leftrightarrow \mathbf{\omega = 10 \text{ rad/s}}$$

- Δ4.** Από Α.Δ.Μ.Ε. στο χρονικό διάστημα $t_0 \rightarrow t_1$ έχουμε:

$$E_0 = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv_0^2 = 2\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Leftrightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,5 \text{ m}}$$

- Δ5.** Τη χρονική στιγμή t_1 για το σύστημα των σφαιριδίων ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\text{εξ}} \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = \tau_T \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = TR \stackrel{T=F_{\text{ελ}}}{\Leftrightarrow} \frac{dL}{dt} = F_{\text{ελ}}R \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = k\Delta\ell R \Leftrightarrow \mathbf{\frac{dL}{dt} = 50 \text{ kgm}^2/\text{s}^2}$$

Επίσης $L = 2m\omega R^2$.

Άρα:

$$\frac{dL}{dt} = 2mR^2 \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow k\Delta\ell R = 2mR^2\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{k\Delta\ell}{2mR} \Leftrightarrow \mathbf{\alpha_\gamma = 100 \text{ rad/s}^2}$$