

Ιδανικά vs Πραγματικά Ελατήρια: Θεωρία και Πείραμα

Κωνσταντίνος Παπαφυλάκης

26/12/2023

ΙΔΑΝΙΚΑ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Θεωρία

Ιδανικά λέμε τα ελατήρια τα οποία υφίστανται μονάχα ελαστική παραμόρφωση, δηλαδή το ελατήριο επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα αφού παραμορφωθεί χωρίς εσωτερικές απώλειες ενέργειας. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ιδανικά ελατήρια αλλά υπό ορισμένες συνθήκες τα ελατήρια συμπεριφέρονται σαν ιδανικά, κυρίως όταν η παραμόρφωση είναι σχετικά μικρή (ελαστική περιοχή*).



Εικόνα 1: Μεταλλικά ελατήρια διαφόρων μεγεθών

Για τα ιδανικά ελατήρια ισχύει ο νόμος του Hooke:

$$F = kx$$

όπου F η δύναμη του ελατηρίου, k η σταθερά του ελατηρίου και x η επιμήκυνση ή συσπίρωση του ελατηρίου. Με άλλα λόγια, η δύναμη του ελατηρίου μεταβάλλεται γραμμικά με την παραμόρφωσή του (επιμήκυνση ή συσπίρωση).

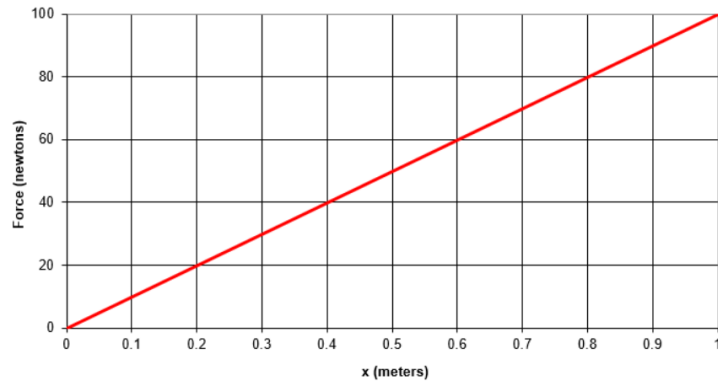
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει για τη σταθερά του ελατηρίου ότι

$$k = \frac{dF}{dx} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

και άρα είναι ανεξάρτητη της δύναμης ή της παραμόρφωσης του ελατηρίου, αλλά έχει σταθερή τιμή κι εξαρτάται μόνο από το ίδιο ελατήριο.

Το διάγραμμα F-x εμφανίζεται παρακάτω

*Η ελαστική περιοχή αναφέρεται στην ελαστική παραμόρφωση ενός υλικού



Πείραμα: Μέτρηση Σταθεράς Ιδανικού Ελατηρίου (Ελαστική Περιοχή)

ΥΛΙΚΑ

- Ελατήριο
- Βαρίδια σχετικά μικρής μάζας
- Χάρακας/Μετροταινία

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Προσαρμόστε ένα από τα βαρίδια στο ελατήριο που πρέπει να βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο.
2. Μετρήστε με τον χάρακα/μετροταινία την επιμήκυνση του ελατηρίου όπου υπάρχει ισορροπία
3. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία και για τα υπόλοιπα βαρίδια
4. Χρησιμοποιήστε τις μαθηματικές σχέσεις που έχουν δοθεί για να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου k .

ΠΙΝΑΚΑΣ

Αριθμός Βαριδίου	Επιμήκυνση (cm)	Μάζα Βαριδίου (kg)	<k> Μέση σταθερά ελατηρίου (N/m)
1			
2			
3			
4			
5			

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Από την ισορροπία του βαριδίου ισχύει ο 1^{ος} Νόμος του Newton

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

Άρα

$$F_{ελ} = w \Rightarrow kx = mg$$

Επομένως

$$k = \frac{mg}{x}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από το πείραμα, η 'μέση' σταθερά του ελατηρίου είναι

_____ N/m

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ (ΜΗ-ΙΔΑΝΙΚΑ) ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Θεωρία

Τα ελατήρια τα οποία δεν βρίσκονται στην ελαστική περιοχή, υφίστανται πλαστική παραμόρφωση, δηλαδή το ελατήριο επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα αφού παραμορφωθεί. Για τα μη-ιδανικά (πραγματικά) ελατήρια δεν ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή η δύναμη του ελατηρίου δε μεταβάλλεται γραμμικά με την παραμόρφωσή του (επιμήκυνση ή συσπίεση).

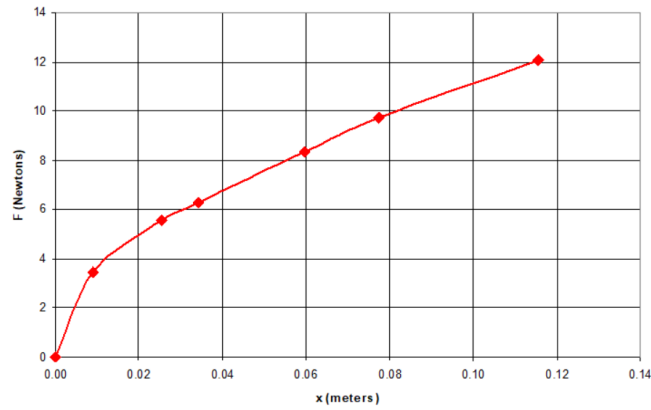
Η σχέση δύναμης-παραμόρφωσης μπορεί να προσδιοριστεί από την λήψη πειραματικών μετρήσεων και με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού.

Στα πραγματικά ελατήρια, η «σταθερά» του ελατηρίου δεν είναι καν σταθερή και για αυτό θα τη λέμε από εδώ και πέρα συντελεστή ακαμψίας. Ο συντελεστής ακαμψίας εξαρτάται από την παραμόρφωση του ελατηρίου και ορίζεται ως

$$k = \frac{dF}{dx}$$

Η φυσική ερμηνεία αυτού του συντελεστή είναι ότι όσο μεγαλύτερη τιμή έχει, τόσο πιο δύσκολα κάμπτεται, δηλαδή παραμορφώνεται, το ελατήριο.

Για ένα παράδειγμα μη-ιδανικού ελατηρίου, το διάγραμμα F-x από τις πειραματικές μετρήσεις που λήφθηκαν εμφανίζεται παρακάτω



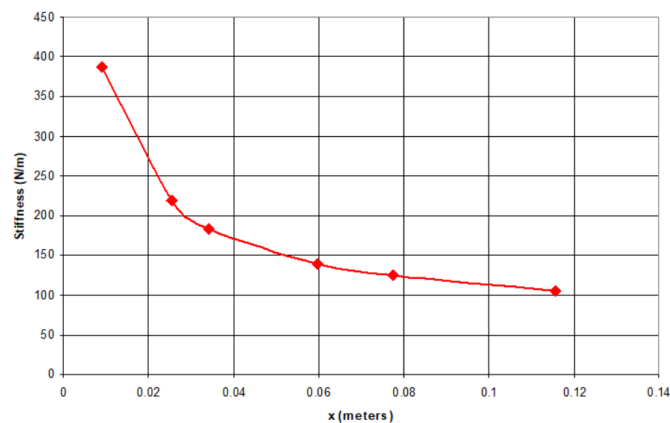
Χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό (π.χ. SciDAVis), προκύπτει ότι η σχέση δύναμης-επιμήκυνσης είναι

$$F = 35,55 x^{0,4871}$$

Συνεπώς ο συντελεστής ακαμψίας δίνεται από τη σχέση

$$k = \frac{dF}{dx} = 16,775 x^{-1/2}$$

Και άρα το διάγραμμα k-x είναι



Πείραμα: Μέτρηση «Σταθεράς» Πραγματικού (Μη-Ιδανικού) Ελατηρίου

ΥΛΙΚΑ

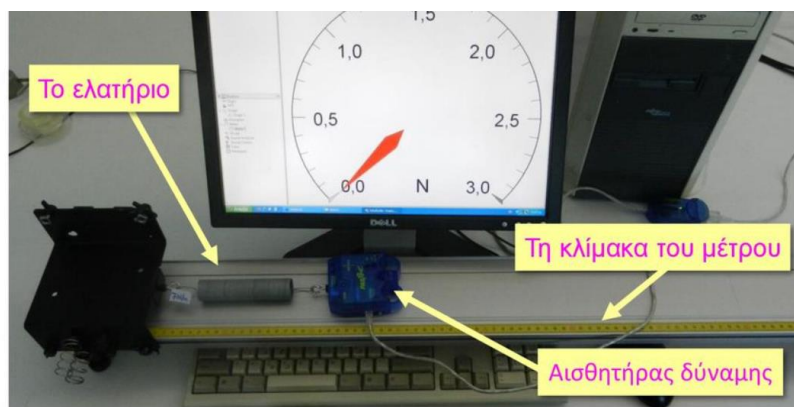
- Ελατήριο
- Αισθητήρας δύναμης
- Η/Υ
- Χάρακας/Μετροταινία

ΜΕΘΟΔΟΣ

1. Προσαρμόστε τον αισθητήρα δύναμης στο ελατήριο

2. Επιμηκύνεται συνεχώς το ελατήριο με τον αισθητήρα δύναμης και μετρήστε με τον χάρακα/μετροταινία την επιμήκυνση του ελατηρίου για πολλές θέσεις του αισθητήρα
3. Με τις τιμές που κατέγραψε ο αισθητήρας και τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις κατασκευάστε σε κατάλληλο λογισμικό (π.χ. SciDAVis) το διάγραμμα F-x.
4. Χρησιμοποιώντας το λογισμικό εξάγετε τη σχέση δύναμης-επιμήκυνσης.
5. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $k = \frac{dF}{dx}$ υπολογίστε τη «σταθερά» του ελατηρίου για κάθε επιμήκυνση
6. Από τις τιμές του k για τα αντίστοιχα x κατασκευάστε σε κατάλληλο λογισμικό το διάγραμμα k-x.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ



ΠΙΝΑΚΑΣ

Επιμήκυνση (cm)	Δύναμη (N)	«Σταθερά» ελατηρίου

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$k = \frac{dF}{dx}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από το πείραμα, το διάγραμμα $k-x$ είναι

_____ “Διάγραμμα” _____

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Science Buddies, “Linear & Nonlinear Springs Tutorial”,
<https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/references/linear-nonlinear-springs-tutorial>
- 2) Wikipedia, “Παραμόρφωση (Μηχανική)”,
[https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B1%CE%BC%CF%8C%CF%81%CF%86%CF%89%CF%83%CE%B7_\(%CE%BC%CE%B7%CF%87%CE%B1%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CE%AE\)](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B1%CE%BC%CF%8C%CF%81%CF%86%CF%89%CF%83%CE%B7_(%CE%BC%CE%B7%CF%87%CE%B1%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CE%AE))
- 3) “Άσκηση 5”, <https://slideplayer.gr/slide/12757208/>