

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Β

A2. Α

A3. Α

A4. Γ

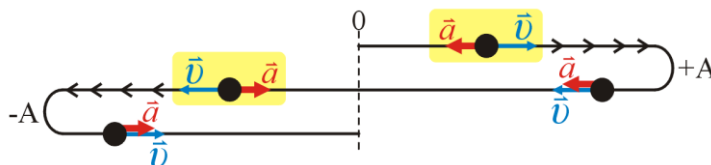
A5. Λ,Λ,Σ,Σ,Σ

A1.β

Αφού $\phi_0 = 0$, το σώμα ξεκινά από τη θέση $x = 0$, την $t = 0$ (με $v > 0$). Κάθε $\Delta t = T/4$, φτάνει σε ακραία θέση, στη θέση ισορροπίας πάλι σε ακραία θέση κ.ο.κ. Άρα κάθε $T/4$ διανύει απόσταση A . σε χρονικό διάστημα $7T/4$ θα έχει διανύσει απόσταση $7A$.

A2.α

Σε μια ΑΑΤ η επιτάχυνση έχει πάντα κατεύθυνση προς την Θ.Ι. ενώ η ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς τη φορά της κίνησης. Για να είναι $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{a}$ θα πρέπει το σώμα είτε να κινείται προς τη θέση $x = +A$ είτε προς τη θέση $x = -A$.



Και στις δύο περιπτώσεις το σώμα οδεύει προς ακραία θέση, άρα η απόλυτη τιμή της θέσης $|x|$ αυξάνεται. Έτσι αυξάνεται και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης ($U = \frac{1}{2}Dx^2$)

A3.α

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \& \quad f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} f$$

Άρα η συχνότητα θα υποδιπλασιαστεί.

A4.γ

Για τα πλάτη της φθίνουσας ταλάντωσης ισχύει: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots$

Από τα δύο τελευταία κλάσματα έχουμε:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_2^2 = A_1 A_3 \Rightarrow A_2 = \sqrt{A_1 A_3} \quad \therefore$$

A5.α (Λ)

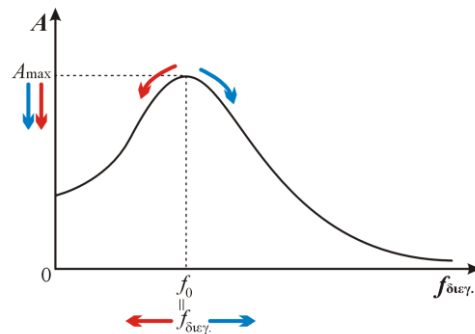
$$U = 5K \xrightarrow{E=K+U} E = \frac{U}{5} + U = \frac{6U}{5} \Rightarrow U = \frac{5E}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{5}{6} \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} A \quad (\text{δύο θέσεις})$$

Το σώμα σε μια περίοδο θα περάσει 2 φορές από κάθε θέση (ια φορά με $v > 0$ και μια με $v < 0$). Για τις δύο θέσεις όπου $U = 5K$ θα έχουμε συνολικά 4 φορές σε μια περίοδο.

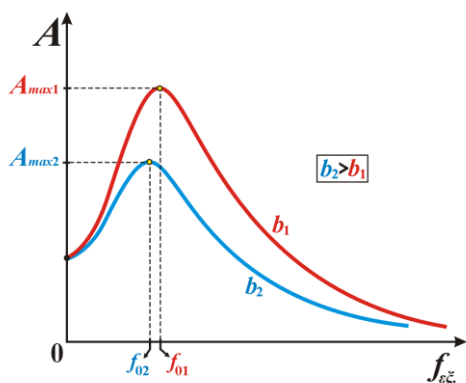
Σημείωση: οποιαδήποτε σχέση $U = v^2 K$ ($v \neq 0$) συμβαίνει σε δύο θέσεις, άρα 4 φορές σε κάθε περίοδο.

A5.β (Λ)

Το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό, άρα $f_{\delta\epsilon\gamma} = f_0$. Θα απομακρυνθεί από την κατάσταση συντονισμού και στις δύο περιπτώσεις (με αύξηση και με μείωση της $f_{\delta\epsilon\gamma}$.) και σύμφωνα με το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης θα μειωθεί (και στις δύο περιπτώσεις).



A5.γ (Σ)



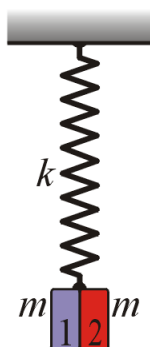
Σύμφωνα με το σχήμα, όταν η σταθερά απόσβεσης αυξάνεται ($b_2 > b_1$) ο συντονισμός παρατηρείται σε μικρότερη συχνότητα και το μέγιστο πλάτος (πλάτος κατά τον συντονισμό) μειώνεται.

A5.δ (Σ)

$$k = D_{\sigma\sigma\sigma} = m_{\sigma\sigma} \omega^2 = 2m \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{2m}$$

$$\bullet D_1 = m_1 \omega^2 = m \frac{k}{2m} = \frac{k}{2}$$

$$\bullet D_2 = m_2 \omega^2 = m \frac{k}{2m} = \frac{k}{2}$$



A5.ε (Σ)

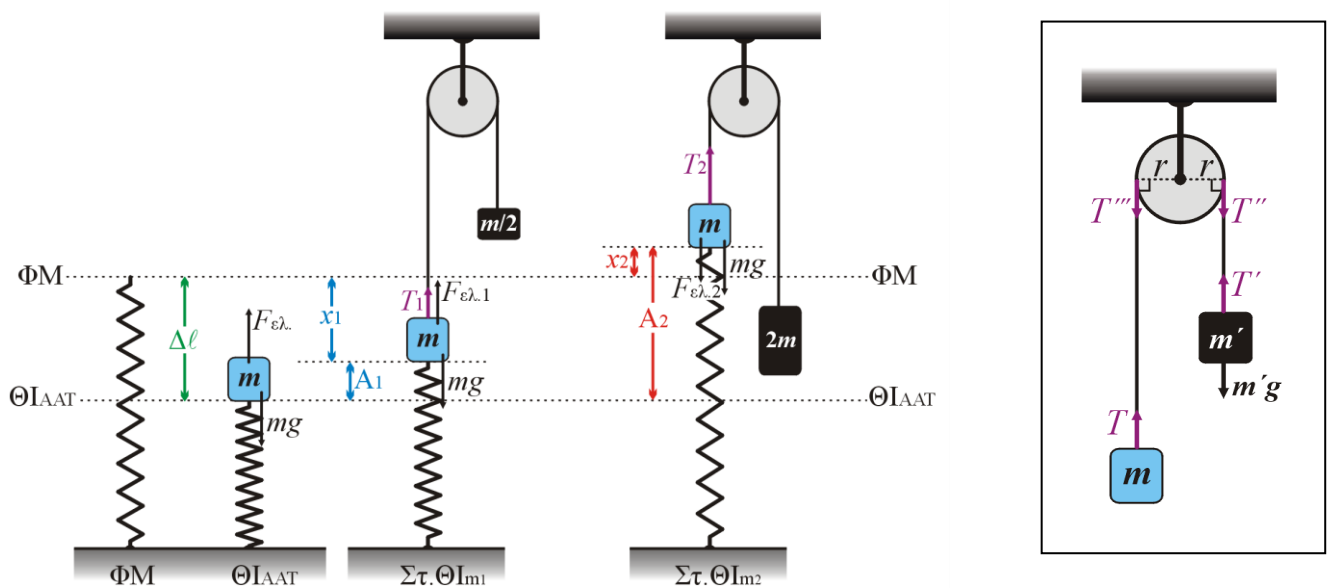
$$\Theta.I.: \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\pi\alpha\nu.} + F_{\alpha\pi\sigma\beta.} = 0 \Rightarrow -Dx - b\nu = 0 \Rightarrow -Dx = b\nu \Rightarrow \nu = -\frac{D}{b}x$$

Αν $x_1 > 0$ και αυτή είναι Θ.Ι., τότε σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε $\nu_1 < 0$.



Θέμα Β

B1. [ii]



- Ισορροπία του m' (δλδ του Σ1 ή του Σ2): $\Sigma F = 0 \Rightarrow m'g = T'$
- Αβαρές νήμα: $T' = T''$
- Τροχαλία σε ισορροπία: $\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T'''r - T''r = 0 \Rightarrow T''' = T''$
- Αβαρές νήμα: $T''' = T$
- Από τις τρεις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι: $T = m'g$

▪ Επομένως: $T_1 = m_1g = \frac{mg}{2}$ και $T_2 = m_2g = 2mg$

• Θ.Ι.ΑΑΤ: $\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta \ell = mg \Rightarrow \Delta \ell = \frac{mg}{k}$

• Στατική Θ.Ι.(με το m_1): $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 + k x_1 = mg \Rightarrow \frac{mg}{2} + k x_1 = mg \Rightarrow k x_1 = \frac{mg}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{mg}{2k}$

• Στατική Θ.Ι.(με το m_2): $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = k x_2 + mg \Rightarrow 2mg = k x_2 + mg \Rightarrow k x_2 = mg \Rightarrow x_2 = \frac{mg}{k}$

Όταν κόβονται τα νήματα, το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του με $v=0$, άρα οι στατικές Θ.Ι. είναι ακραίες θέσεις για την κάθε ταλάντωση. Για τα πλάτη έχουμε:

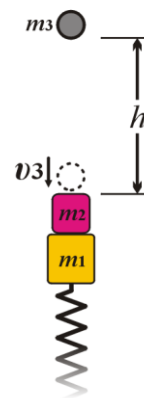
$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Delta \ell - x_1 = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{2k} \Rightarrow A_1 = \frac{mg}{2k} \\ A_2 &= \Delta \ell + x_2 = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \Rightarrow A_2 = \frac{2mg}{k} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{mg}{2k}}{\frac{2mg}{k}} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4} \quad \dots \text{άρα σωστό το (ii).}$$

B2. [i]

- ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}m_3 0^2 + m_3 gh = \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + m_3 g 0 \Rightarrow v_3 = \sqrt{2gh}$

- Ελαστική Κρούση: $m_3 = 3m$ και $m_1 + m_2 = 2m + m = 3m$, άρα $m_3 = m_1 + m_2$ και έτσι έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων. Άρα μετά την κρούση το σύστημα $m_{1,2}$ αποκτά ταχύτητα $V = \sqrt{2gh}$ και επειδή το σύστημα βρισκόταν στην Θ.Ι. η ταχύτητα V θα είναι η μέγιστη ταχύτητα για την ταλάντωση που θα προκύψει:

$$V = \omega A \Rightarrow \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow 2gh = \frac{k}{m_1 + m_2} A^2 \Rightarrow 2gh = \frac{k}{2m + m} A^2 \Rightarrow h = \frac{kA^2}{6mg} \quad (1)$$

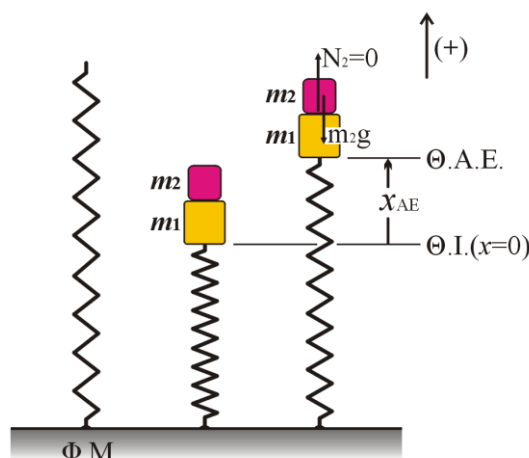


- Θ.Α.Ε.: θέση απώλειας επαφής

- Για την ταλάντωση του m_2 :

- $D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} = m \frac{k}{2m + m} \Rightarrow D_2 = \frac{k}{3}$

- $\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow N_2 - m_2 g = -D_2 x \xrightarrow{N_2=0} -m_2 g = -D_2 x_{AE} \Rightarrow x_{AE} = \frac{m_2 g}{D_2} = \frac{mg}{k/3} \Rightarrow x_{AE} = \frac{3mg}{k} \quad (2)$



- Αν το πλάτος της ΑΑΤ που θα προκύψει είναι τέτοιο ώστε το σύστημα να μην φτάσει ποτέ στη θέση απώλειας επαφής (x_{AE}), τότε ποτέ το m_2 δεν θα χάσει την επαφή του με το m_1 . Έτσι θα πρέπει το πλάτος της ταλάντωσης να είναι πάντα μικρότερο από τη θέση απώλειας επαφής ($A \leq x_{AE}$) και στην οριακή περίπτωση θα πρέπει: $A = x_{AE}$.

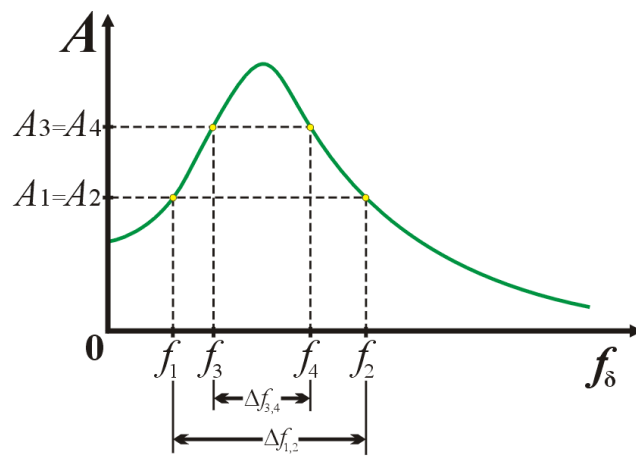
- Για αυτή την οριακή περίπτωση θα βρούμε το ελάχιστο ύψος h :

- $A = x_{AE} \xrightarrow{(1),(2)} h = \frac{k}{6mg} \frac{9m^2 g^2}{k^2} \Rightarrow h = \frac{3mg}{2k}$

...άρα σωστό το (i).

B3. [i]

Σύμφωνα με το διάγραμμα του πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη, για να έχουμε ίδιο πλάτος για δύο διαφορετικές συχνότητες, θα πρέπει αυτές να είναι εκατέρωθεν της ιδιοσυχνότητας της ταλάντωσης. Τοποθετώντας τις 4 συχνότητες που μας λέει η εκφώνηση και τα δύο πλάτη, με το $A_3 > A_1$, έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Παρατηρούμε από το σχήμα ότι η μεταβολή $f_2 - f_1$ είναι μεγαλύτερη από την μεταβολή $f_4 - f_3$ (και αυτό οφείλεται στη μορφή του διαγράμματος και στην απαίτηση $A_3 > A_1$).

...άρα σωστό το (i).



Θέμα Γ

Γ1.

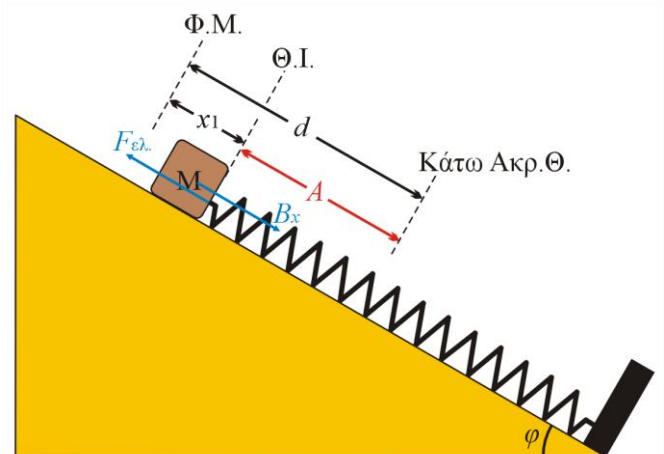
$$\underline{\text{Θ.Ι.}}: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = F_{ελ.} \Rightarrow Mg \eta \mu \phi = k x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{Mg \eta \mu \phi}{k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1/2}{100} \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

Στη θέση όπου η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $d = 0,4 \text{ m}$ το σώμα M αφήνεται. Άρα αυτή είναι η κάτω ακραία θέση της ΑΑΤ. Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι η απόσταση αυτής της ακραίας θέσης με τη θέση ισορροπίας:

$$A = d - x_1 = 0,4 - 0,1 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Και η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_T = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,3^2 \Rightarrow E_T = 4,5 \text{ J}$$



Γ2.

Στη Θ.Ι. έχουμε $x=0$ και $v = v_{\max}$:

$$v = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{M}} A = \sqrt{\frac{100}{2}} 0,3 = \sqrt{50} \cdot 0,3 = 5\sqrt{2} \cdot 0,3 \Rightarrow v = 1,5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Γ2.i.

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = \Sigma F v = -D x v = -100 \cdot 0 \cdot 1,5\sqrt{2} = 0$$

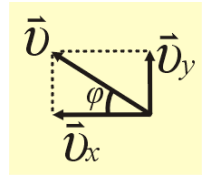
Γ2.ii.

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = 0 \quad \left(E = K + U \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \xrightarrow{E=\text{σταθ.}} 0 = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \right)$$

Γ2.iii.

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho.}}{dt} = \frac{d(Mgh)}{dt} = Mg \frac{dh}{dt} = Mg v_y = Mg v \eta \mu \phi = 2 \cdot 10 \cdot 1,5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho.}}{dt} = +15\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Το σώμα περνώντας από την Θ.Ι. για 1^η φορά, ανεβαίνει, άρα το h αυξάνεται. Επομένως η $U_{\beta\alpha\rho.} = Mgh$ αυξάνεται, άρα ο ρυθμός της είναι θετικός.



Γ2.iv.

Στη Θ.Ι. έχουμε: $\Delta\ell = x_1 = 0,1 \text{ m}$ και $v = v_{\max} = 1,5\sqrt{2} \text{ m/s}$. Επομένως:

$$\left| \frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} \right| = \left| -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda.}}}{dt} \right| = \left| -\frac{F_{\varepsilon\lambda.} dx}{dt} \right| = |F_{\varepsilon\lambda.} v| = |(-k \Delta\ell) v| = k |\Delta\ell| |v| = 100 \cdot 0,1 \cdot 1,5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Στη Θ.Ι. το ελατήριο είναι συσπειρωμένο (κατά x_1). Όμως την 1^η φορά που το M περνά από εκεί, κινείται προς τα πάνω, άρα προς το Φ.Μ. Έτσι το ελατήριο “οδεύει” προς λιγότερη συσπίρωση. Έτσι η παραμόρφωση – συσπίρωση ($\Delta\ell$) ελαττώνεται και αντίστοιχα ελαττώνεται και η $U_{\varepsilon\lambda.} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$, άρα ο ρυθμός της θα είναι αρνητικός. Επομένως έχουμε:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} = -15\sqrt{2} \text{ J/s}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$E_{\mu\eta\chi.} = K + U_{\beta\alpha\rho.} + U_{\varepsilon\lambda.} \Rightarrow \frac{dE_{\mu\eta\chi.}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU_{\beta\alpha\rho.}}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} \xrightarrow{\frac{dE_{\mu\eta\chi.}}{dt} = \text{σταθ.} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 0 \text{ (Θ.Ι.)}} 0 = 0 + \frac{dU_{\beta\alpha\rho.}}{dt} + \frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho.}}{dt} = -\frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt}$$

Γ3.

ΑΔΕΤ (Ακρ.Θ.→Φ.Μ.):

$$\begin{aligned} E &= K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow kA^2 = Mv_1^2 + kx_1^2 \Rightarrow 100 \cdot 0,3^2 = 2v_1^2 + 100 \cdot 0,1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9 = 2v_1^2 + 1 \Rightarrow 8 = 2v_1^2 \Rightarrow 4 = v_1^2 \Rightarrow v_1 = \pm 2 \text{ m/s} \Rightarrow |v_1| = 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Γ4.

ΑΔΟ:

$$\begin{aligned} \vec{p}_M &= \vec{p}_m + \vec{p}_{\sigma\sigma.} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -Mv_1 + mv_2 = (m+M)V \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2 \cdot 2 + m \cdot 4 = (m+2) \cdot 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -4 + m \cdot 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ kg} \end{aligned}$$



Γ5.

Λόγω αλλαγής της μάζας (από M σε $M+m$), αλλάζει και η Θέση Ισορροπίας. Συμβολίζουμε με Ν.Θ.Ι. τη Νέα Θέση Ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} = B'_x \Rightarrow k x_2 = (m+M)g \eta\mu\phi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100 \cdot x_2 = (1+2) \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 100 \cdot x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 0,15 \text{ m}$$

Εφόσον το αποτέλεσμα της πλαστικής κρούσης ήταν να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα στο Φ.Μ. του ελατηρίου, αυτή

η θέση θα είναι και η ακραία θέση για τη νέα ταλάντωση. Επομένως το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι $A' = x_2 = 0,15 \text{ m}$.

Λόγω της, προς τα πάνω θετικής φοράς, το συσσωμάτωμα βρίσκεται την $t=0$ στην άνω ακραία θέση, δηλαδή στη θέση $x = +A$. Επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$:

$$\left. \begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \\ t = 0, x = +A, v = 0 \end{array} \right\} A = A\eta\mu(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0}$$
$$\longrightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Και η νέα γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

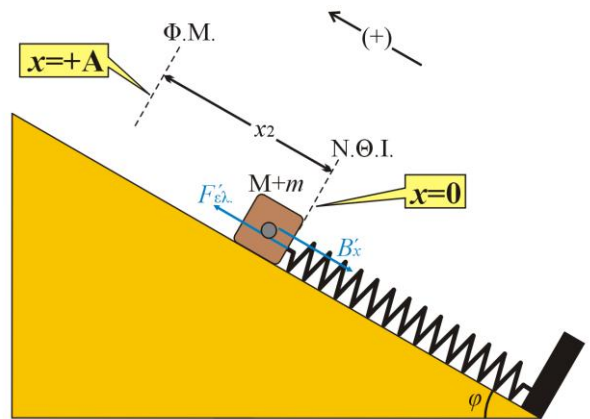
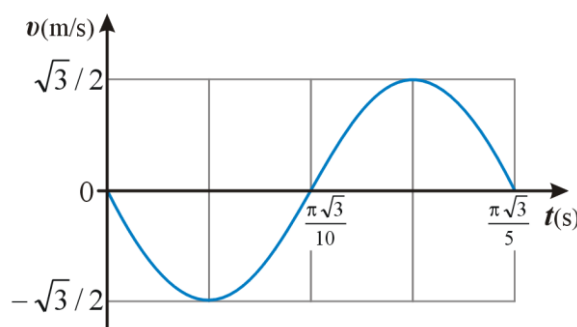
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{100}{1+2}} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$$

Και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$v'_{\max} = \omega' A' = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 0,15 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

Άρα η εξίσωση και η γραφική παράσταση της ταχύτητας είναι:

$$v = v'_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega' t + \phi_0) \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\sqrt{3}}{3} t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \eta\mu\left(\frac{10\sqrt{3}}{3} t\right)$$



Θέμα Δ

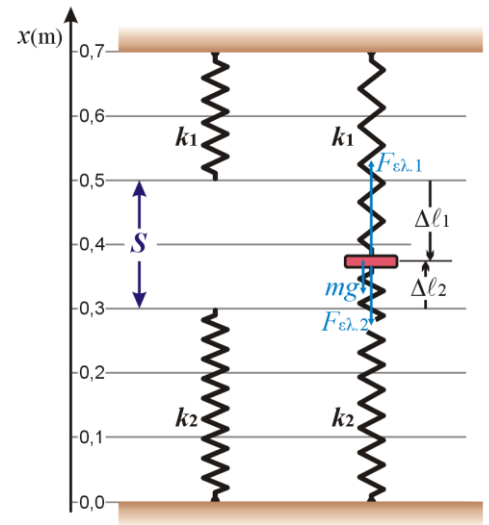
Δ1.

Έστω ότι ισορροπεί στη θέση που δείχνεται στο σχήμα:

$$\begin{aligned}\Sigma F = 0 &\Rightarrow F_{ελ.1} = mg + F_{ελ.2} \Rightarrow k_1 \Delta \ell_1 = mg + k_2 \Delta \ell_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 300 \Delta \ell_1 = 60 + 100 \Delta \ell_2 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \Delta \ell_2 \quad (1)\end{aligned}$$

Από το σχήμα:

$$\begin{aligned}S = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 &\xrightarrow{(1)} 0,2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \Delta \ell_2 + \Delta \ell_2 \Rightarrow \frac{4}{3} \Delta \ell_2 = 0,2 - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta \ell_2 = 0 \xrightarrow{(1)} \Delta \ell_1 = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ m}\end{aligned}$$



Άρα το σώμα ισορροπεί στη θέση του Φυσικού Μήκους (ΦΜ) του ελατηρίου k_2 (με μόνο το k_1 εκτονωμένο κατά $\Delta \ell_1 = 0,2 \text{ m}$). Σύμφωνα με το σχήμα το σώμα ισορροπεί στη θέση $x = 0,3 \text{ m}$ του αριθμημένου κατακόρυφου άξονα του σχήματος.

Δ2.

$$\underline{\text{Ο.Ι.}}: \Sigma F = 0 \Rightarrow mg = F_{ελ.1} \Rightarrow mg = k_1 S \quad (1)$$

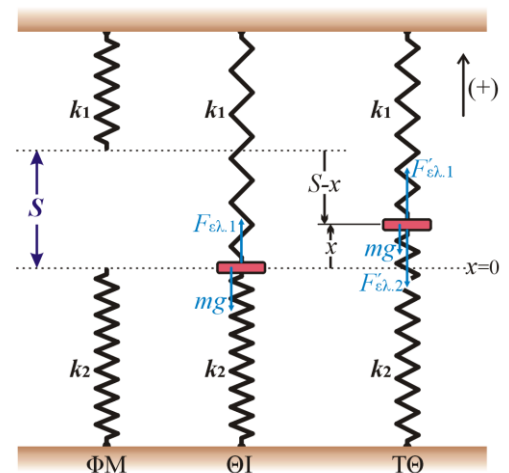
$$\begin{aligned}\underline{\text{Τ.Θ.}}: \Sigma F = F'_{ελ.1} - mg - F'_{ελ.2} &= k_1(S - x) - mg - k_2 x = \\ &= k_1 S - k_1 x - mg - k_2 x \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x\end{aligned}$$

Άρα της μορφής $\Sigma F = -Dx$, άρα ΑΑΤ με $D = k_1 + k_2$:

$$D = k_1 + k_2 = 300 + 100 \Rightarrow D = 400 \text{ N/m}$$

Και συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{6}} = \frac{1}{2\pi} \frac{20}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\pi} \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3\pi} \text{ Hz}$$



Δ3.

Εφόσον το σώμα εκτρέπεται προς τα πάνω κατά d και αφήνεται ελεύθερο ($v=0$), θα αφήνεται από ακραία θέση και αφού η θετική φορά είναι η προς τα πάνω, θα αφήνεται από την θετική ακραία θέση. Έτσι έχουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = d = 0,2 \text{ m}$ και η αρχική φάση της ταλάντωσης θα είναι $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

$$\left. \begin{aligned} x &= A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \\ t=0, \quad x &= +A, \quad v=0 \end{aligned} \right\} A = A\eta\mu(\omega \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{400}{6}} = \frac{20}{\sqrt{6}} = 20 \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ rad/s}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{10\sqrt{6}}{3}} = \frac{6\pi}{10\sqrt{6}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{10} \text{ sec}$$

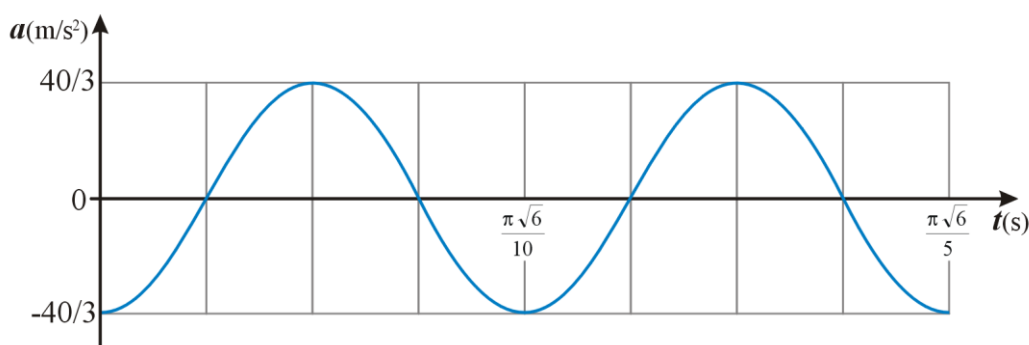
Η μέγιστη επιτάχυνση θα είναι:

$$a_{\max} = \omega^2 A = \left(\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2 0,2 = \frac{100 \cdot 6}{9} 0,2 = \frac{40}{3} \text{ m/s}^2$$

Τελικά η εξίσωση της επιτάχυνσης θα είναι:

$$a = -a_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow a = -\frac{40}{3} \eta\mu\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{40}{3} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}t\right)$$

Ο χρόνος $t = \pi\sqrt{6}/5 \text{ sec}$ που μας δίνει η εκφώνηση, αντιστοιχεί σε δύο περιόδους, αφού $T = \pi\sqrt{6}/10 \text{ sec}$. Άρα η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Δ4.ι.

Ενέργεια ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} 400 \cdot 0,2^2 = 200 \cdot 0,04 = 8 \text{ J}$$

Η θέση $x = 0,4 \text{ m}$ του άξονα, αντιστοιχεί σε θέση $x' = +0,1 \text{ m}$ της ταλάντωσης, αφού η Θ.Ι. της είναι η θέση ΦM_2 , $x_{\Phi M_2} = 0,3 \text{ m}$, και η θετική φορά είναι η προς τα πάνω. Άρα στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$U = \frac{1}{2} D x'^2 = \frac{1}{2} 400 \cdot 0,1^2 = 200 \cdot 0,01 = 2 \text{ J}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της Ταλάντωσης (ΑΔΕΤ) έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow 8 = K + 2 \Rightarrow K = 6 \text{ J}$$

Δ4.ii.

Από την κινητική ενέργεια έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} 6 v^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Αλλά γνωρίζοντας ότι το σώμα κινείται προς τα κάτω, άρα προς την αρνητική φορά, έχουμε:

$v = -\sqrt{2} \text{ m/s}$ και τελικά:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} = \Sigma F v = -D x' v = -400 \cdot 0,1 \cdot (-\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +40\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Δ4.iii.

Για το ελατήριο k_1 στη θέση $x = 0,4 \text{ m}$ του άξονα έχουμε (από το σχήμα):

$$|\Delta \ell| = |0,4 - 0,5| = 0,1 \text{ m}$$

Και για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου αυτού έχουμε:

$$\left| \frac{dU_{\varepsilon\lambda.1}}{dt} \right| = \left| -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda.1}}}{dt} \right| = \left| -\frac{F_{\varepsilon\lambda.1} dx}{dt} \right| = | -F_{\varepsilon\lambda.1} v | = | -(-k_1 \Delta \ell) v | = k_1 |\Delta \ell| |v| = 300 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Επειδή το σώμα κινείται προς τα κάτω και το ελατήριο σε αυτή τη θέση είναι ήδη εκτονωμένο, “οδεύει” προς μεγαλύτερη εκτόνωση. Άρα το $\Delta \ell$ αυξάνεται, άρα και η $U_{\varepsilon\lambda.} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2$ αυξάνεται. Έτσι ο ρυθμός μεταβολής θα είναι θετικός:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda.1}}{dt} = +30\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Δ5.

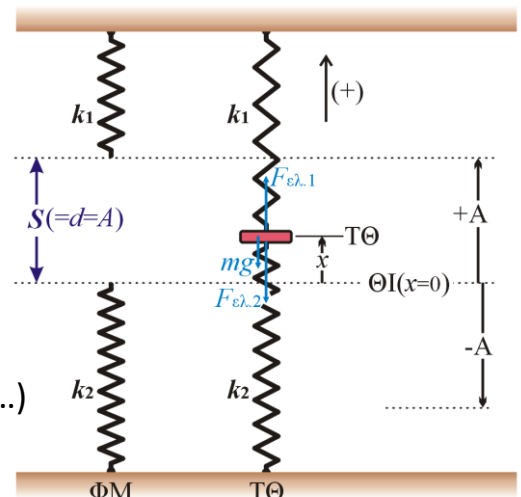
Το σώμα ισορροπεί στο ΦΜ του ελατηρίου 2. Στη συνέχεια το εκτρέπουμε κατά $d = S$ προς τα πάνω, δηλαδή στο ΦΜ του ελατηρίου 1. Άρα το ΦΜ του ελατηρίου 1 θα είναι η πάνω ακραία θέση για την ΑΑΤ (με ΘΙ, το ΦΜ του ελατηρίου 2). Συνεπώς το ελατήριο 1 θα είναι πάντα εκτονωμένο και οριακά θα φτάνει στο ΦΜ του, μια φορά κάθε περίοδο. Το ελατήριο 2 θα εκτονώνεται και θα συσπειρώνεται.

Για τη συνισταμένη δύναμη τη ταλάντωσης έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow +F_{\varepsilon\lambda.1} + F_{\varepsilon\lambda.2} - mg = -Dx$$

Όπου:

- η $F_{\varepsilon\lambda.1}$ είναι θετική γιατί το ελατήριο 1 είναι πάντα εκτονωμένο, άρα η δύναμη που ασκεί είναι πάντα προς τα πάνω, άρα θετική.
- η $F_{\varepsilon\lambda.2}$ μπήκε θετική γιατί την ψάχνουμε (και ό,τι βγει...)
- το βάρος είναι αρνητικό, γιατί είναι προς τα κάτω



Τελικά έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow +F_{ελ.1} + F_{ελ.2} - mg = -Dx \Rightarrow k_1(S - x) + F_{ελ.2} - mg = -Dx \Rightarrow F_{ελ.2} = -k_1(S - x) + mg - Dx \Rightarrow F_{ελ.2} = -300(0,2 - x) + 60 - 400x = -60 + 300x + 60 - 400x \Rightarrow F_{ελ.2} = -100x$$

• Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε την $F_{ελ.2}$ από τον νόμο του Hooke:

$$F_{ελ.2} = -k_2 \Delta \ell_2 = -k_2 x = -100x$$

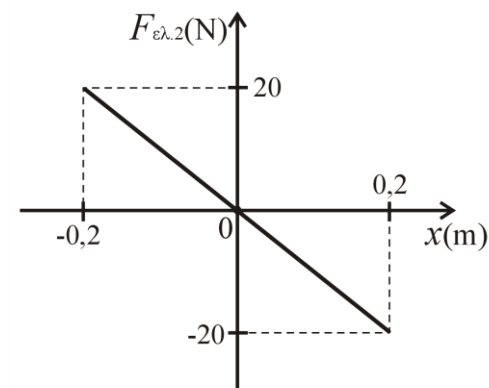
Αφού το ΦM_2 ταυτίζεται με την ΘI της ταλάντωσης, άρα $\Delta \ell_2 = x$.

Για την γραφική παράσταση (που είναι της μορφής $y = ax$, με αρνητική κλίση) έχουμε:

$$x = -0,2 \text{ m} \Rightarrow F_{ελ.2} = -100 \cdot (-0,2) = +20 \text{ N}$$

$$x = 0 \Rightarrow F_{ελ.2} = -100 \cdot 0 = 0$$

$$x = +0,2 \text{ m} \Rightarrow F_{ελ.2} = -100 \cdot (+0,2) = -20 \text{ N}$$



Επιμέλεια: Αναστάσιος Νέζης

<http://nezistasos.com/>