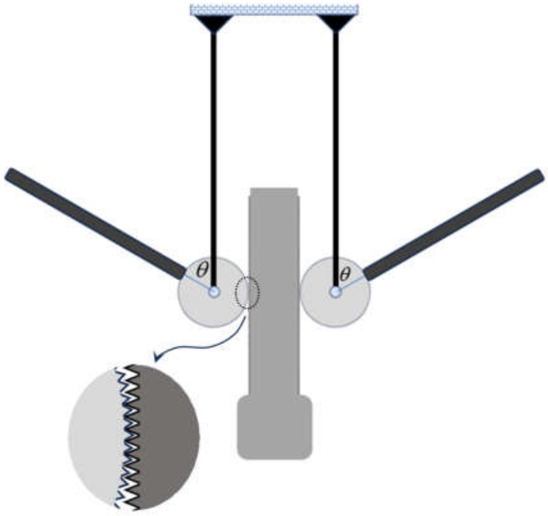
Αντεστραμμένο ανοιχτήρι



Οι δύο δίσκοι ακτίνας r μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητους οριζόντιους άξονες, που διέρχονται από τα κέντρα τους. Στην περιφέρειά τους υπάρχουν μικρά γρανάζια, τα οποία εμπλέκονται με κατάλληλα "δοντάκια" στις πλευρές του κεντρικού σώματος, βάρους $\vec{w}_1$, ώστε η περιστροφή των δίσκων να έχει σαν αποτέλεσμα την κατακόρυφη κίνησή του. Σε συμμετρικές θέσεις στις περιφέρειες των δίσκων έχουν κολληθεί δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι, βάρους $\vec{w}$ και μήκους ℓ η κάθε μία.

Διερευνήστε την ύπαρξη θέσεων ισορροπίας του συστήματος καθώς και την ευστάθεια.

Εφαρμογή για: $w_1 = 5w$ και $\ell = 8r$

Υ.Γ. Η ιδέα που δικαιολογεί και τον τίτλο της άσκησης και ο τρόπος που μπορεί να μελετηθεί βιωματικά το φαινόμενο που περιγράφεται.

Σύντομες λύσεις

1η λύση:

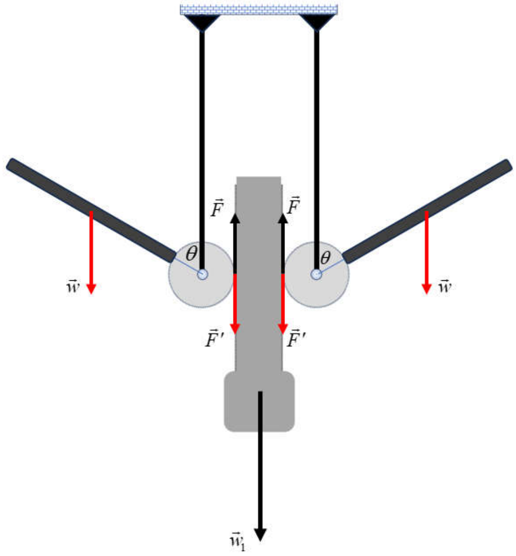
Ισχύει: $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F}'\right| = F$ αφού οι δυνάμεις έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης.

Για την ισορροπία του κεντρικού σώματος πρέπει,

$$F = \frac{w_1}{2} \qquad (1)$$

Για την ισορροπία κάθε ενός από τα συστήματα δίσκος – ράβδος πρέπει για τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων να ισχύει,

$$\tau_{\vec{F}'} = \tau_{\vec{w}} \Rightarrow Fr = w\left(\frac{\ell}{2} + r\right)\eta\mu\theta \qquad (2)$$



Συνδυάζοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\boxed{\eta\mu\theta = \frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)}} \qquad (3)$$

Όπως είναι φανερό από την (3) για να υπάρχει θέση ισορροπίας πρέπει, $\frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)} \leq 1$.

Για $\frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)} = 1$, προκύπτει $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Για $\frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)} < 1$, υπάρχουν δύο θέσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν σε παραπληρωματικές γωνίες.

<u>Έλεγχος ευστάθειας</u>

Για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

Για μικρή αύξηση (μείωση) της γωνίας το μέτρο της ροπής του βάρους της ράβδου αυξάνεται (μειώνεται) αφού αυξάνεται (μειώνεται) το $\eta\mu\theta$, ενώ η ροπή της δύναμης $\vec{F}'$ δεν μεταβάλλεται. Επομένως η γωνία θα αυξηθεί (μειωθεί) περαιτέρω και η ισορροπία καταρρέει.

Για $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ.

Στην περιοχή αυτή η συνάρτηση του ημιτόνου είναι φθίνουσα οπότε συμβαίνει το αντίθετο από την προηγούμενη περίπτωση, με αποτέλεσμα την επαναφορά στη θέση ισορροπίας μετά από μικρή διαταραχή.

2η λύση

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος για τυχαία γωνία θ δίνεται από τη σχέση,

$$U(\theta) = U(0) + w_1 r\theta - 2w\left(\frac{\ell}{2} + r\right)(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)$$

όπου $U(0)$ η δυναμική ενέργεια για $\theta = 0$.

Οι θέσεις ισορροπίας (αν υπάρχουν) θα βρεθούν από τη λύση της εξίσωσης, $\frac{dU}{d\theta} = 0$.

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow w_1 r - 2w\left(\frac{\ell}{2} + r\right)\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\eta\mu\theta = \frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)}}$$

Επίσης για την περίπτωση ύπαρξης λύσεων $\left(\frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)} \le 1\right)$,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -2w\left(\frac{\ell}{2} + r\right)\sigma\upsilon\nu\theta$$

Συμπέρασμα:

Για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0$, τοπικό μέγιστο, ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Για $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0$, τοπικό ελάχιστο, ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d^2U}{d\theta^2} = 0$, σημείο καμπής, ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Εφαρμογή: $w_1 = 5w$ και $\ell = 8r$

$$\eta\mu\theta = \frac{w_1}{w\left(\frac{\ell}{r} + 2\right)} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{6} & \text{ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ} \\ \theta_2 = \frac{5\pi}{6} & \text{ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ} \end{cases}$$

Παρατήρηση: *Η μάζα των δύο δίσκων δεν επηρεάζει την λύση*

Λευκάδα 2024

Σπύρος Χόρτης