

Μια διαφορετική σκοπιά στο θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας μεταβολών

Τερλεμές Σπύρος

spyrosssterlemes@gmail.com

19-2-2020

Στην απόδειξη των εξισώσεων Euler-Lagrange, απαιτούμε το ολοκλήρωμα της δράσης να παρουσιάζει ακρότατο (αρχή του Hamilton). Εφαρμόζοντας variation theory καταλήγουμε στο ότι, η συνθήκη αυτή του ακροτάτου του ολοκληρώματος, δίνει την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη :

$$\int_t^{t'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) n_i(z) dz = 0$$

(1)

Και η (1) ισχύει για κάθε συνάρτηση n . Έστω ότι ορίζουμε τον πρώτο όρο του γινόμενου της ολοκληρωτέας ως $f_i(z)$ τότε έχουμε την εξίσωση:

$$\int_t^{t'} f_i(z) n_i(z) dz = 0 \quad \forall n_i(z)$$

(2)

Το θεμελιώδες θεώρημα λέει ότι για να συμβαίνει το παραπάνω πρέπει η συνάρτηση f να είναι μηδενική παντού. Παρόλο που είναι «διαισθητικά» προφανές, δεν είναι τόσο απλό στην απόδειξη. Η αυστηρή μαθηματική του απόδειξη είναι δύσκολη. Ωστόσο, ας δούμε μια διαφορετική λιγότερο μαθηματική διέξοδο. Έστω ότι θεωρούμε την συνάρτηση:

$$F(z) = \int f_i(z) n_i(z) dz + C$$

(3)

Παραγωγίζουμε χρονικά και παίρνουμε:

$$F'(z) = f_i(z) n_i(z)$$

(4)

Κάνουμε λοιπόν την υπόθεση ότι η $f_i(z)$ δεν είναι παντού μηδέν. Εφόσον η $n_i(z)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε διαλέγουμε την $n_i(z)$ να είναι τέτοια ώστε να έχει πάντα το ίδιο πρόσημο που έχει η f_i για όλες τις διαμερίσεις στο πεδίο ορισμού της. Έτσι το γινόμενο τους είναι πάντα θετικό. Αυτό σημαίνει σύμφωνα με την (4) ότι:

$$F'(z) > 0$$

(5)

Έτσι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα και άρα αφού η χρονική στιγμή t είναι διαφορετική (μικρότερη) της στιγμής t' , ισχύει ότι:

$$F(t) < F(t') \Rightarrow F(t) \neq F(t')$$

(6)

Αν επανέρθουμε όμως στην σχέση (2), από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε:

$$\int_t^{t'} F'(z) dz = F(t') - F(t) = 0 \Rightarrow F(t') = F(t)$$

(7)

Έτσι η σχέση (6) και (7) έρχονται σε αντίθεση, οπότε τελικά η συνάρτηση $f_i(z)$ είναι παντού μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση (1) τελικά δίνει πράγματι τις εξισώσεις Euler-Lagrange.