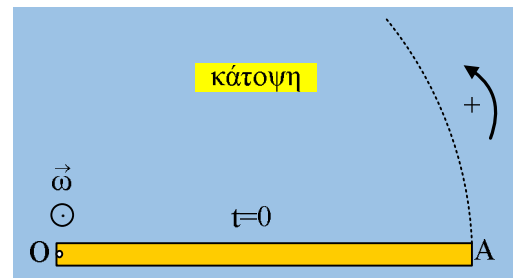


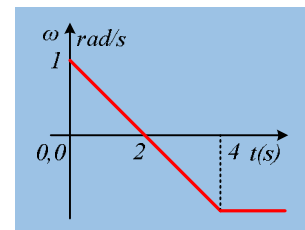
Η κινηματική της περιστροφής

Μια ράβδος OA, μήκους $l=4\text{m}$, στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O και σε μια στιγμή $t=0$, βρίσκεται στη θέση που δείχνει το σχήμα έχοντας γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=1\text{rad/s}$.

Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητάς της ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα, για τη χρονική στιγμή $t_0=0$, η γραμμική ταχύτητα, η επιτρόχια επιτάχυνση και η κεντρομόλος επιτάχυνση του άκρου A της ράβδου και στη συνέχεια να υπολογιστούν τα μέτρα τους.
- ii) Να βρεθεί η θέση της ράβδου τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ και να υπολογιστεί η επιτάχυνση του άκρου A, στη θέση αυτή.
- iii) Σε ποια θέση βρίσκεται η ράβδος τη στιγμή $t_2=4\text{s}$; Να σχεδιαστεί ένα σχήμα που να φαίνεται η ταχύτητα του άκρου A της ράβδου, τη στιγμή αυτή και να υπολογισθούν το μέτρο της και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της.



Απάντηση.

Στο διάγραμμα ω - t η κλίση μας δίνει την γωνιακή επιτάχυνση του στερεού. Αλλά με βάση το διάγραμμα η κλίση παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα 0-4s, οπότε και η αντίστοιχη γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή, ίση και με τη μέση τιμή της (ας χρησιμοποιήσουμε το διάστημα 0-2s):

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-1}{2-0} \text{ rad/s}^2 = -0,5 \text{ rad/s}^2.$$

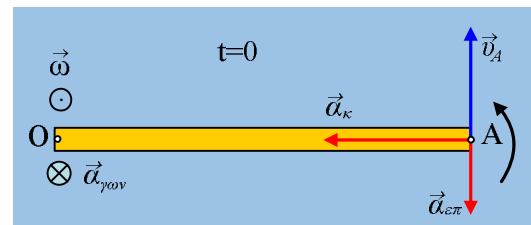
Το αρνητικό πρόσημο μας λέει ότι το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης, έχει αντίθετη φορά από την θετική φορά, που είναι η κατεύθυνση της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

- i) Στο διπλανό διάγραμμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ταχύτητας, επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης του άκρου A, τη χρονική στιγμή $t=0$. Για τα **μέτρα** τους έχουμε:

$$v_A = \omega \cdot l = 1 \cdot 4 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}.$$

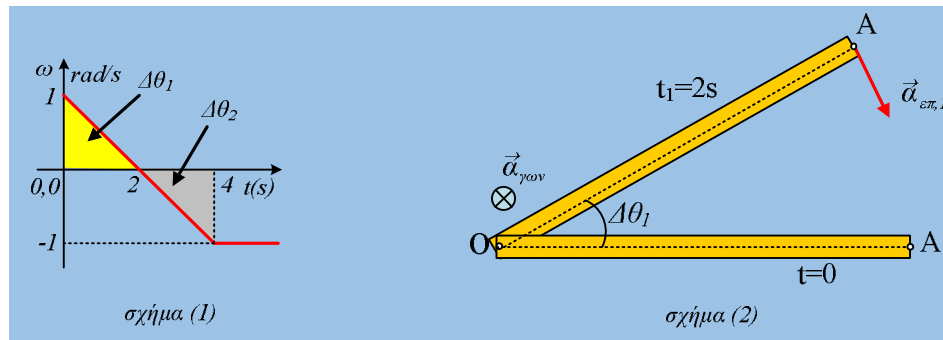
$$\alpha_{\epsilon\pi} = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \cdot l = 0,5 \cdot 4 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 \cdot l = 1^2 \cdot 4 \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2.$$



- ii) Στο διάγραμμα ω - t το εμβαδόν του χωρίου από την γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή μετατόπιση του στερεού. Έτσι μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$ η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta_1$ αριθμητικά ίση (σε ακτίνια) με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, στο πρώτο από

τα παρακάτω σχήματα (1):



$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \text{ rad} = 1 \text{ rad}.$$

Η ράβδος δηλαδή έχει στραφεί κατά γωνία 1rad (περίπου $57,3^\circ$) και βρίσκεται στη θέση που δείχνει το σχήμα (2), έχοντας μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Ας προσέξουμε ότι η ράβδος έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα, ενώ η γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή (σταθερή κλίση...), με αποτέλεσμα το άκρο A να μην έχει κεντρομόλο επιτάχυνση, να έχει όμως επιτροχία επιτάχυνση, κάθετη στη ράβδο, όπως στο σχήμα, μέτρου:

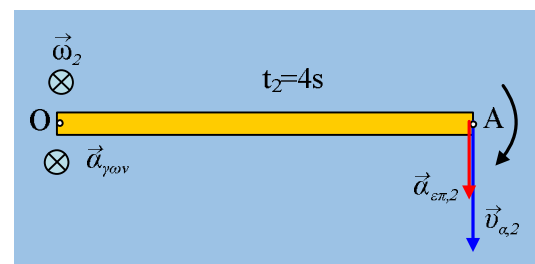
$$a_{\varepsilon\pi,1} = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \cdot \ell = 0,5 \cdot 4 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι η παραπάνω επιτροχία επιτάχυνση έχει το ίδιο μέτρο με την αντίστοιχη τη στιγμή $t=0$.

- iii) Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η ράβδος στράφηκε (αριστερόστροφα) κατά γωνία $\Delta\theta_1=1\text{rad}$, μέχρι τη στιγμή $t_1=2\text{s}$. Αλλά τότε με βάση το σχήμα (1) στο χρονικό διάστημα 2s-4s, η ράβδος στρέφεται με αντίθετη φορά (δεξιόστροφα) διαγράφοντας γωνία $\Delta\theta_2$, αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του γκρι τριγώνου. Αλλά από την ισότητα των δύο τριγώνων προκύπτει ότι τη στιγμή $t_2=4\text{s}$ η ράβδος έχει $\omega=-1\text{rad/s}$, οπότε:

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \text{ rad} = -1 \text{ rad}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η ράβδος περιστράφη δεξιόστροφα κατά γωνία 1rad επιστρέφοντας στην αρχική της θέση που βρισκόταν τη στιγμή $t=0$. Αλλά τότε στη θέση αυτή έχει την ταχύτητα που έχει σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα με το ίδιο μέτρο $v_{A,2}=4\text{m/s}$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας, η αναφερόμενη παραπάνω επιτροχία επιτάχυνση, είναι ξανά κάθετη στη ράβδο, όπως ακριβώς και τη στιγμή $t=0$, αφού δεν έχει μεταβληθεί η γωνιακή επιτάχυνση. Δηλαδή για το μέτρο της $a_{\varepsilon\pi,2}=2 \text{ m/s}^2$.



dmargaris@gmail.com