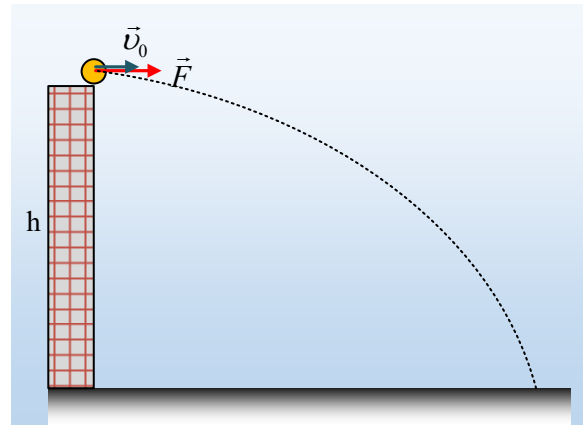


### Η αρχή της επαλληλίας σε δύο εκτοξεύσεις.

Μια μπάλα, μάζας  $m=0,5\text{kg}$ , εκτοξεύεται από την ταράτσα της σπιτιού, σε ύψος  $h=45\text{m}$ , οριζόντια με αρχική ταχύτητα  $v_0=12\text{m/s}$ .



- i) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος, σε πόση οριζόντια απόσταση θα συμβεί αυτό και ποια η τελική κινητική ενέργεια της μπάλας.
- ii) Επαναλαμβάνουμε την εκτόξευση, αλλά τώρα με την βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού, ασκείται στην μπάλα μια σταθερή οριζόντια δύναμη  $F$ , μέτρου  $F=3\text{N}$ .

- α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει τώρα η μπάλα στο έδαφος και σε πόση οριζόντια απόσταση θα συμβεί αυτό;
- β) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της μπάλας, ελάχιστα πριν την πρόσκρουση στο έδαφος και να συγκριθεί με την αρχική μηχανική ενέργεια της στιγμή της εκτόξευσης. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

- iii) Αν στην δεύτερη εκτόξευση η δύναμη  $F$  έπαυε να ασκείται  $2\text{s}$  μετά την εκτόξευση, σε ποιο σημείο του εδάφους θα έπεφτε η μπάλα;

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ , ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

#### Απάντηση:

- i) Για την μπάλα που εκτοξεύεται οριζόντια, θεωρώντας σύνθετη την κίνησή της, με βάση την αρχή της επαλληλίας, ισχύουν για τις επιμέρους κινήσεις της άξονες  $x$  και  $y$ , που έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα:

| Άξονας $x$          | Άξονας $y$              |
|---------------------|-------------------------|
| $v_x=v_0$ (1)       | $v_y=gt$ (3)            |
| $x=v_0 \cdot t$ (2) | $y=\frac{1}{2}gt^2$ (4) |

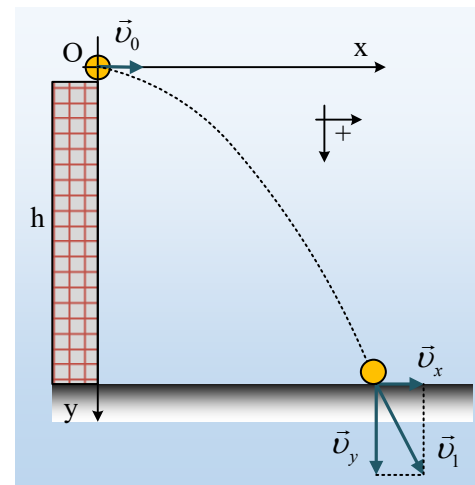
Αντικαθιστώντας στην (4)  $y=h$  βρίσκουμε:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}}\text{s} = 3\text{s}$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (2), βρίσκουμε ότι θα φτάσει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση:

$$x = x_1 = v_0 \cdot t_1 = 12 \cdot 3\text{m} = 36\text{m}$$

Όσον αφορά την τελική της κινητική ενέργεια, θα είναι:



$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + g^2 t_1^2) \rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2}0,5 \cdot (12^2 + 10^2 \cdot 3^2) J = 261 J$$

**Σημείωση:** Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την παραπάνω κινητική ενέργεια, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης:

$$K_{ap} + U_{ap\chi} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 12^2 J + 0,5 \cdot 10 \cdot 45 J = 261 J$$

ii) Από τη στιγμή που στην μπάλα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη, θα αποκτήσει και σταθερή οριζόντια επιτάχυνση μέτρου:

$$F = ma_x \rightarrow a_x = \frac{F}{m} = \frac{3}{0,5} m/s^2 = 6 m/s^2.$$

Αλλά τότε και στην οριζόντια διεύθυνση η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και οι αντίστοιχες εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

| Άξονας x                                     | Άξονας y                   |
|----------------------------------------------|----------------------------|
| $v_x = v_o + a_x t$ (1α)                     | $v_y = gt$ (3)             |
| $x = v_o \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$ (2α) | $y = \frac{1}{2} gt^2$ (4) |

α) Αλλά τότε η εξίσωση (4) είναι ίδια με προηγουμένως, πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση της μπάλας στην κατακόρυφη διεύθυνση δεν άλλαξε, οπότε για τον χρόνο πτώσης θα έχουμε ξανά  $t = t_2 = 3s$ .

Ενώ με αντικατάσταση στην (2<sup>α</sup>) θα πάρουμε για την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να πέσει στο έδαφος:

$$x = x_2 = v_o t_2 + \frac{1}{2} a_x t_2^2 = 12 \cdot 3m + \frac{1}{2} 6 \cdot 3^2 m = 63m$$

β) Τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στο έδαφος έχει συνιστώσες ταχύτητας:

$$v_{x2} = v_o + a_x \cdot t_2 = (12 + 6 \cdot 3) m/s = 30m/s \quad \text{και} \quad v_{y2} = gt_2 = 10 \cdot 3m/s = 30m/s$$

Οπότε η κινητική της ενέργεια είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(v_{x2}^2 + v_{y2}^2) = \frac{1}{2}0,5 \cdot (30^2 + 30^2) J = 450 J$$

Προφανώς κινητική αυτή ενέργεια είναι μεγαλύτερη από την  $K_1$  ( $450 > 261$ ). Η αύξηση αυτή οφείλεται στο έργο της ασκούμενης δύναμης  $F$ . Πράγματι:

$$W_F = F \cdot x_2 = 3 \cdot 63 J = 189 J^*$$

Πράγματι:

$$K_1 + W_F = 261J + 189J = 450J = K_2.$$

iii) Με βάση τα προηγούμενα η άσκηση της δύναμης  $F$  δεν επηρεάζει την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, οπότε και πάλι η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος σε χρόνο  $t_3 = 3s$ . Αλλά μέχρι τη στιγμή  $t' = 2s$  θα ισχύουν οι προηγούμενες εξισώσεις, όπου με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$v'_x = v_o + a_x t' = 12m/s + 6 \cdot 2m/s = 24m/s \text{ και}$$

$$x' = v_o t' + \frac{1}{2} a_x t'^2 = 12 \cdot 2m + \frac{1}{2} 6 \cdot 2^2 m = 36m$$

Στη συνέχεια και για το τελευταίο sec της κίνησης, η μπάλα

στην οριζόντια διεύθυνση κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, με αποτέλεσμα να μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x = v'_x \cdot \Delta t = 24 \cdot 1m = 24m$$

Φτάνοντας στη θέση:

$$x_3 = x' + \Delta x = 36m + 24m = 60m.$$

**Σχόλιο\*** :

Έστω μια στοιχειώδης μετατόπιση της μπάλας κατά  $\Delta s$ , με την επίδραση της σταθερής οριζόντιας δύναμης  $F$ . Στη διάρκειά της η δύναμη παράγει στοιχειώδες έργο:

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta s \cdot \cos \theta = F \cdot \Delta s_{xi}$$

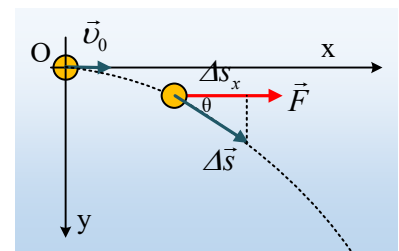
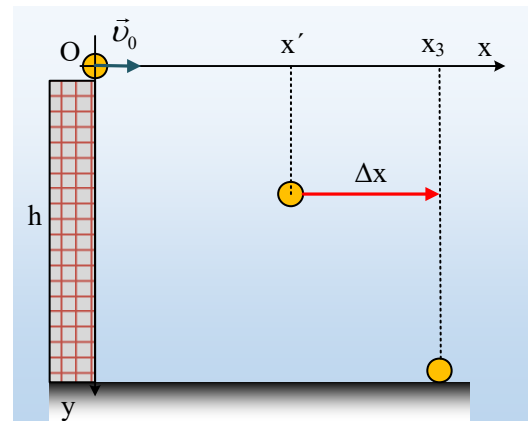
Όπου  $F$  και  $\Delta s$  τα μέτρα δύναμης και μετατόπισης της μπάλας.

Βλέπουμε δηλαδή το αντίστοιχο έργο να είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης, επί το μέτρο της προβολής της στοιχειώδους μετατόπισης  $\Delta \vec{s}$  στη διεύθυνση της δύναμης.

Αλλά τότε για να υπολογίσουμε το ολικό έργο της δύναμης δεν έχουμε παρά, να χωρίσουμε την τροχιά σε στοιχειώδη τόξα  $\Delta s$  και να προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχειώδη έργα. Τότε θα παίρναμε:

$$W_F = W_1 + W_2 + \dots W_n = F \cdot \Delta s_{x1} + F \cdot \Delta s_{x2} + \dots F \cdot \Delta s_{xn} \rightarrow$$

$$W_F = F \cdot (\Delta s_{x1} + \Delta s_{x2} + \dots \Delta s_{xn}) = F \cdot x_2$$



[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)