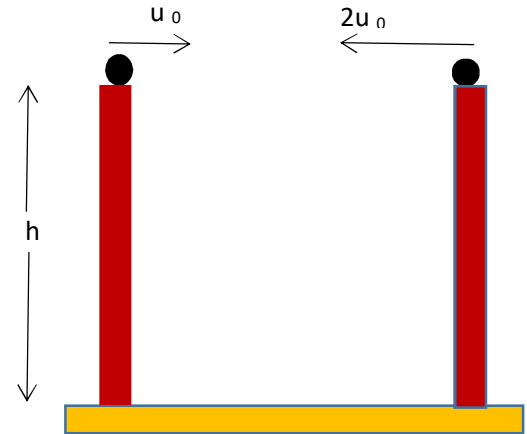


ΤΡΙΑ ΘΕΜΑΤΑΚΙΑ Β ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΟΥΛΑ
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΒΟΛΕΣ – ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

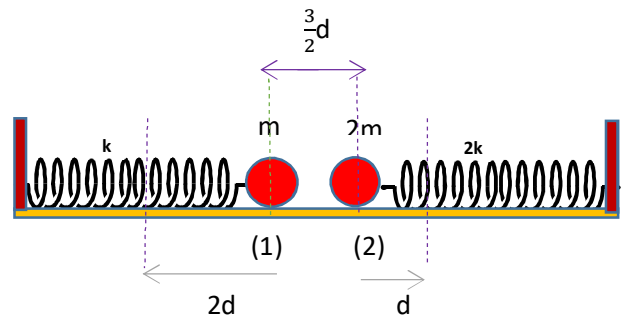
Ταυτόχρονα δίνουμε οριζόντιες αρχικές ταχύτητες u_0 και $2u_0$ στα σώματα με μάζες $2m$ και m αντίστοιχα από ύψος h . Τα σώματα συναντώνται και συγκρούονται πλαστικά. Η ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος το συσσωμάτωμα έχει μέτρο :



- α) $u_{εδ.} = \sqrt{gh}$ β) $u_{εδ.} = \sqrt{2gh}$ γ) $u_{εδ.} = \frac{1}{2}\sqrt{gh}$

ΘΕΜΑ 2

Τα ισομεγέθη σώματα (1), (2) έχουν μάζες m , $2m$, συνδέονται με τα άκρα των ελατηρίων k , $2k$, βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ισορροπούν. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων συνδέονται με σταθερά σημεία. Οι θέσεις ισορροπίας των σωμάτων απέχουν μεταξύ τους $\frac{3}{2}d$. Μετατοπίζουμε προς τα αριστερά το σώμα (1) κατά $2d$ και προς τα δεξιά το σώμα (2) κατά d και τα αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερα. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



A. Αν τα διαστήματα από τη στιγμή που αφήνουμε τα σώματα μέχρι να συγκρουστούν για πρώτη φορά είναι S_1 για το σώμα (1) και S_2 για το σώμα (2), η σχέση μεταξύ τους είναι:

- α) $S_2 = S_1$ β) $S_2 = 2S_1$ γ) $2S_2 = S_1$

Β. Αν τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων λίγο πριν τη πρώτη κρούση είναι u_1, u_2 , η σχέση μεταξύ τους είναι:

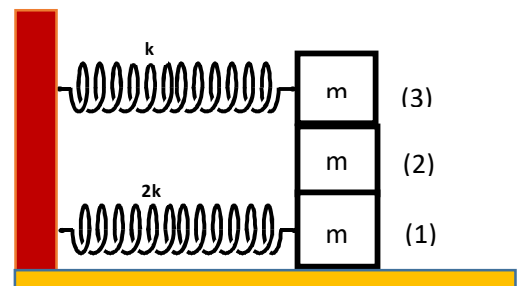
- α) $u_1 = u_2$ β) $u_1 = 2u_2$ γ) $2u_1 = u_2$

Γ. Αν τα διαστήματα από την πρώτη κρούση μέχρι τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι S'_1, S'_2 η σχέση μεταξύ τους είναι:

- α) $S'_1 = S'_2$ β) $S'_1 = 2S'_2$ γ) $2S'_1 = S'_2$

ΘΕΜΑ 3

Τα τρία σώματα στο διπλανό σχήμα ισορροπούν. Το δάπεδο είναι λείο και τα σώματα αποτελούνται το ίδιο υλικό. Το πάνω ελατήριο έχει σταθερά k και το κάτω σταθερά $2k$. Τα σώματα έχουν ίδια μάζα m και το κάτω ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $d = \frac{\mu mg}{2k}$, όπου μ ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων.



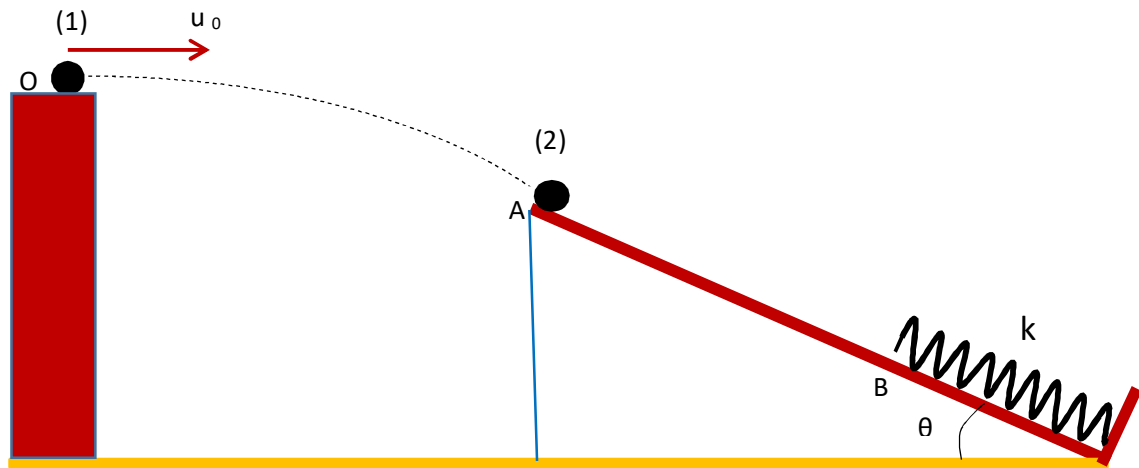
Το μέγιστο πλάτος για να κάνουν μαζί ταλάντωση τα τρία σώματα είναι:

- α) $\frac{d}{2}$ β) d γ) $2d$

ΑΣΚΗΣΟΥΛΑ

Τα σώματα (1) και (2) έχουν ίσες μάζες $m = 1 \text{ Kg}$ και αποτελούνται από το ίδιο υλικό. Το σώμα (2) ισορροπεί στη θέση Α του πλάγιου επιπέδου με γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$. Ελατήριο σταθεράς $k = 12,5 \pi^2 \text{ N/m}$ είναι τοποθετημένο παράλληλα στο πλάγιο επίπεδο με σταθερό το ένα του άκρο στο κατώτερο σημείο του επιπέδου και το ελεύθερο άκρο του στο σημείο Β. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα (1) βάλλεται οριζόντια, με αρχική ταχύτητα u_0 . Το σώμα (1) συγκρούεται με το σώμα (2) πλαστικά με ταχύτητα u_1 που είναι παράλληλη στο πλάγιο επίπεδο. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο, πέφτει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και σταματάει για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων

και του επιπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/3$ και η υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων A,B είναι $h=0,8$ m να βρείτε:



- α) Τη χρονική στιγμή της κρούσης.
- β) Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.
- γ) Τη θερμότητα που εκλύεται από $t=0$ μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στο άκρο του ελατηρίου.
- δ) Τους ρυθμούς μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος (1) τις χρονικές στιγμές $t=0,2s$ και $t=0,5s$.
- ε) Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα, από τη στιγμή που το ελατήριο αποκτήσει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια μέχρι να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Έστω ότι η κρούση γίνεται μετά από χρόνο t_1 από τη στιγμή που έγιναν οι βολές. Η κατακόρυφη ταχύτητα και των δύο σωμάτων λίγο πριν την κρούση είναι $u_\psi = gt_1$.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα :

$$\text{ΑΔΟ}_{(x)} : 2mu_0 - m2u_0 = 0$$

$$\text{ΑΔΟ}_{(\psi)} : 2mu_\psi + mu_\psi = 3mV_{κ.ψ} \Rightarrow V_{κ.ψ} = u_\psi$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι $V_{κ.ψ} = u_\psi$ (1)

Η κατακόρυφη μετατόπιση από τις θέσεις των βολών μέχρι τη θέση της κρούσης είναι h_1 .

Ισχύει $u_{\psi}^2 = 2gh_1$ (Από $u_{\psi} = gt_1, h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$) και με την (1): $V_{\kappa.\psi}^2 = u_{\psi}^2 = 2gh_1$ (2)

Η κατακόρυφη μετατόπιση από τη θέση της κρούσης μέχρι το έδαφος είναι h_2 .

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ από τη θέση της κρούσης μέχρι το έδαφος.

$$\frac{1}{2}3mV_{\kappa.\psi}^2 + 3mgh_2 = \frac{1}{2}3mu_{\varepsilon\delta}^2 \Rightarrow V_{\kappa.\psi}^2 + 2gh_2 = u_{\varepsilon\delta}^2 \quad \text{και με την (2)}$$

$$u_{\varepsilon\delta}^2 = 2gh_2 + 2gh_1 \Rightarrow u_{\varepsilon\delta}^2 = 2g(h_2 + h_1) \Rightarrow u_{\varepsilon\delta}^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{u_{\varepsilon\delta} = \sqrt{2gh}}$$

ΘΕΜΑ 2

A. Οι γωνιακές συχνότητες των ταλαντώσεων είναι $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$

και $T_1 = T_2 = T$.

Τα σώματα διέρχονται την ίδια χρονική στιγμή από τη θέση ισορροπίας τους, μετά $T/4$ από τη στιγμή που τα αφήσαμε. Θεωρούμε χρονική στιγμή $t=0$ τη στιγμή που τα σώματα διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους με θετική φορά του σώματος (1) προς τα δεξιά και θετική φορά του σώματος (2) προς τα αριστερά.

Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων των σωμάτων είναι: $x_1 = 2d\eta\mu\omega t$, $x_2 = d\eta\mu\omega t$.

Το άθροισμα των απομακρύνσεων από $t=0$ μέχρι τη στιγμή της συνάντησης t_1 είναι:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}d \Rightarrow 2d\eta\mu\omega t_1 + d\eta\mu\omega t_1 = \frac{3}{2}d \Rightarrow \eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x_1 = d \quad , \quad x_2 = d/2.$$

Οπότε $S_1 = 3d$ και $S_2 = 3d/2$ δηλαδή $S_1 = 2 S_2$ Σωστό το γ

B. Τα μέτρα των ταχυτήτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$u_1 = \omega \sqrt{4d^2 - d^2} = \omega d\sqrt{3} \quad u_2 = \omega \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \omega d\sqrt{3}/2 \quad , \quad \text{Άρα } u_1 = 2u_2 \quad \boxed{\text{Σωστό το β}}$$

Γ. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων λίγο πριν την πρώτη κρούση είναι $u_1 = 2u_2$, $-u_2$.

Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων αμέσως μετά την πρώτη κρούση προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$u'_1 = \frac{m-2m}{m+2m} u_1 + \frac{4m}{m+2m} (-u_2) = -u_1/3 - 2u_1/3 = -u_1$$

$$u'_2 = \frac{2m-m}{m+2m} (-u_2) + \frac{2m}{m+2m} 2u_2 = -u_2/3 + 4u_2/3 = u_2$$

Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την πρώτη κρούση είναι αντίθετες των ταχυτήτων τους λίγο πριν την κρούση. Τα σώματα αμέσως μετά την κρούση θα εκτελέσουν αντίστροφα τις ίδιες ταλαντώσεις και θα συγκρουστούν στο ίδιο σημείο την ίδια χρονική στιγμή. Και το ίδιο φαινόμενο θα επαναλαμβάνεται. Τα διαστήματα S'_1 , S'_2 είναι: $S'_1 = 2 S_1$ και $S'_2 = 2 S_2$.

Επομένως $S'_1 = 2 S'_2$

Σωστό το β

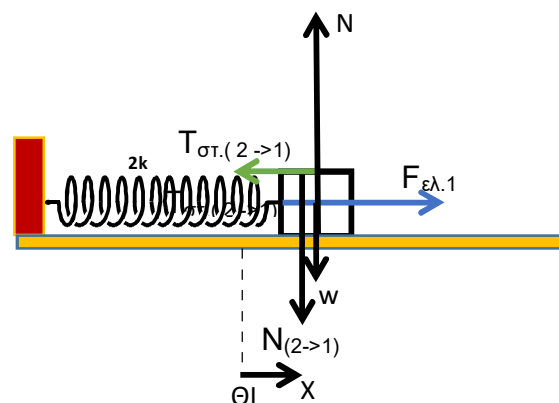
ΘΕΜΑ 3

Από την ισορροπία του συστήματος αφού το κάτω έχει συσπίρωση d το πάνω έχει επιμήκυνση $d_3 = 2d$: Από την εξίσωση $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ.1} = F_{ελ.2} \Rightarrow 2kd = kd_2 \Rightarrow d_3 = 2d$ (1)

Θεωρούμε το σύστημα σε απομάκρυνση x με θετικά προς τα δεξιά και με $x < d$

Η στατική τριβή από το μεσαίο σώμα στο κάτω σώμα είναι προς τα αριστερά επειδή η δύναμη του ελατηρίου στο κάτω σώμα είναι προς τα δεξιά και η συνισταμένη τους – δύναμη επαφής – είναι προς τα αριστερά. Λόγω Δράσης – Αντίδρασης η στατική τριβή από το κάτω σώμα στο μεσαίο είναι προς τα δεξιά. Η στατική τριβή από το πάνω σώμα στο μεσαίο είναι προς τα αριστερά γιατί η συνισταμένη δύναμη – δύναμη επαφής- στο μεσαίο σώμα είναι προς τα αριστερά. Λόγω Δράσης – Αντίδρασης η στατική τριβή από το μεσαίο σώμα στο πάνω είναι προς τα δεξιά.

Οι δυνάμεις στο κάτω σώμα (1) είναι η $F_{ελ.1}$, η $T_{στ.(2 \rightarrow 1)}$, η $N_{(2 \rightarrow 1)}$, το βάρος W_1 και η N από το οριζόντιο επίπεδο.

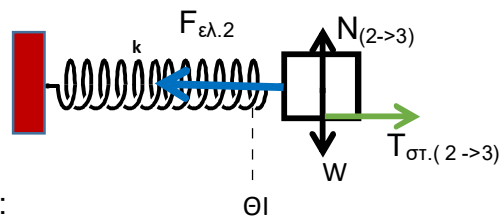


Η δύναμη επαφής στο κάτω σώμα είναι:

$$F_{επ.} = ma = -m\omega^2 x \quad \text{με} \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{3m}} \quad \text{ή} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow$$

$$2k(d-x) + T_{στ.(2 \rightarrow 1)} = -kx \quad \Rightarrow \quad T_{στ.(2 \rightarrow 1)} = kx - 2kd \quad (2)$$

Οι δυνάμεις στο πάνω σώμα (3) είναι $F_{ελ.2}$
 η $T_{στ.(2 \rightarrow 3)}$, η $N_{(2 \rightarrow 3)}$ και το βάρος W_3

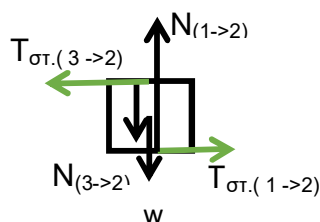


Η δύναμη επαναφοράς στο πάνω σώμα (3) είναι:

$$F_{επ.} = ma = -m\omega^2 x = -kx \quad \Rightarrow \quad -k(d_2 + x) + T_{στ.(2 \rightarrow 3)} = -kx \quad \Rightarrow \quad T_{στ.(2 \rightarrow 3)} = kd_2$$

και λόγω της (1) $T_{στ.(2 \rightarrow 3)} = 2kd$ (3)

Στο μεσαίο σώμα (2) ασκούνται οι
 δυνάμεις $T_{στ.(3 \rightarrow 2)}$, $T_{στ.(1 \rightarrow 2)}$, W_2 ,
 $N_{(3 \rightarrow 2)}$ και $N_{(1 \rightarrow 2)}$



Η δύναμη επαναφοράς στο μεσαίο σώμα (2) είναι :

$$F_{επ.} = -T_{στ.(3 \rightarrow 2)} + T_{στ.(1 \rightarrow 2)} = -2kd - kx + 2kd = -kx \quad \Rightarrow \quad F_{επ.} = -kx \quad (4)$$

Η στατική τριβή στο πάνω σώμα, σχέση (3), είναι : $T_{στ.} = 2kd = 2k \frac{\mu mg}{2k} = \mu mg = T_{ορ.στ.}$

Στο μεσαίο σώμα η συνισταμένη των στατικών τριβών, σχέση (4), είναι ανάλογη της οποιαδήποτε μέγιστης απομάκρυνσης από τα άλλα σώματα.

Η στατική τριβή στο κάτω σώμα σχέση (2) είναι : $T_{στ.(2 \rightarrow 1)} = kx - 2kd$ Η μέγιστη στατική τριβή $T_{στ.(2 \rightarrow 1)}$ αντιστοιχεί σε αρνητική τιμή της απομάκρυνσης και έχει μέτρο $T_{ορ.στ} = \mu N_{(2 \rightarrow 1)} = \mu 2mg$.

$$\text{Άρα } \mu 2mg = kA_{\max} + 2kd \quad \Rightarrow \quad 4kd = kA_{\max} + 2kd \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{\max} = 2d}$$

ΑΣΚΗΣΟΥΛΑ

α) Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα (1) συγκρούεται με το σώμα (2), τη χρονική στιγμή t_2 το συσσωμάτωμα φτάνει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και τη χρονική στιγμή $t_3 = 1s$ το συσσωμάτωμα σταματάει για πρώτη φορά, όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συσπείρωσή του.

Στο σημείο A πριν την κρούση:

$$u_{\psi} = gt_1, \quad \eta\mu 30^\circ = u_{\psi} / u_1 \Rightarrow$$

$$u_1 = 2gt_1$$

ΑΔΟ κατά την πλαστική κρούση:

$$mu_1 = 2mV_K \Rightarrow V_K = u_1/2 \Rightarrow$$

$$V_K = gt_1$$

Β Νόμος του Νεύτωνα κατά την κίνηση από το A στο B:

$$\Sigma F = 2ma \Rightarrow W_x - T_{o\lambda} = 2ma$$

$$\Rightarrow 2mg\eta\mu 30^\circ - 2mg\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2ma$$

$$\Rightarrow 2mg\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} 2mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 2ma \Rightarrow a=0. \text{ Από το A μέχρι το B το συσσωμάτωμα κάνει ΕΟΚ με } V_K = gt_1 \quad (1)$$

Κίνηση από το σημείο B μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά.

Θεωρούμε τη συνισταμένη δύναμη σε τυχαία θέση x από το ΦΜ. με θετικά προς τα κάτω.

$\Sigma F = W_x - T_{o\lambda} - kx \Rightarrow \Sigma F = -kx$: Άρα το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ από τη θέση ισορροπίας της που είναι το ΦΜ, μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά.

Η περίοδος της ΑΑΤ είναι: $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}} = 0,8s$. Ο χρόνος κίνησης από το σημείο B μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα είναι $\frac{T}{4} = 0,2s$. και ο χρόνος $t_2 = 1 - 0,2 = 0,8s$ (2)

$$\text{Από την υψομετρική διαφορά των A,B: } \eta\mu 30^\circ = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = 1,6m \quad (3)$$

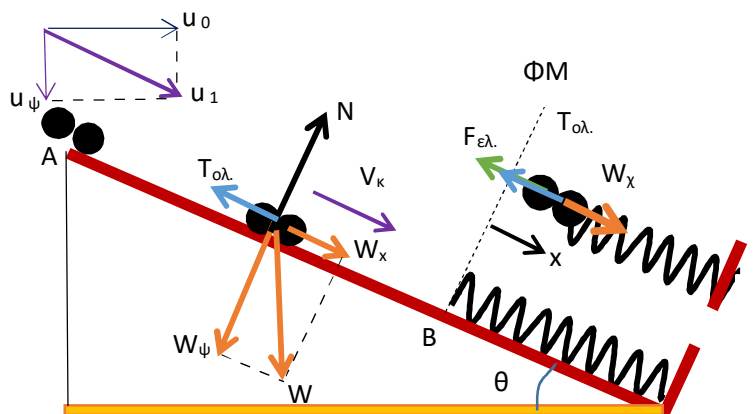
Η μετατόπιση AB λόγω της ΕΟΚ είναι : $AB = V_K(t_2 - t_1)$ και με τις (1), (2), (3) γίνεται

$$1,6 = V_K(0,8 - V_K/10) \Rightarrow 16 = 8V_K - V_K^2 \Rightarrow V_K^2 - 8V_K + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (V_K - 4)^2 = 0 \Rightarrow V_K = 4 \text{ m/s}$$

$$(1) \Rightarrow t_1 = V_K/g = 4/10 \Rightarrow \boxed{t_1 = 0,4 \text{ s}}$$

β) Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ ταλάντωσης από τη στιγμή t_2 μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά το



συσσωμάτωμα. $U_{ελ.(max)} = \frac{1}{2} 2m V_K^2 \Rightarrow U_{ελ.(max)} = 16 \text{ j}$

γ) $Q = Q_{(κρούσης)} + Q_{(τριβής)} = \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{1}{2} 2m V_K^2 + |T_{ολ. AB}| \Rightarrow Q = 32 \text{ j}$

δ) Τη χρονική στιγμή $t = 0,2 \text{ s}$:

$$\frac{dU}{dt} = -W \cdot u_{\psi} = -mggt \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -20 \text{ j / s}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0,5 \text{ s}$:

$$\frac{dU}{dt} = -W \cdot V_{κ.ψ} = -mgV_K \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -20 \text{ j / s}$$

ε) Το πλάτος A της ΑΑΤ από το σημείο B μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα,

-από την ΑΔΕ ταλάντωσης- είναι: $\frac{1}{2} k A^2 = U_{ελ.(max)} \Rightarrow A = \frac{8}{5\pi} \text{ m}$ ή $A = \frac{16}{10\pi} \text{ m}$ (4)

Η ενέργεια που απαιτείται για να μετατοπιστεί το συσσωμάτωμα από τη θέση που σταμάτησε για πρώτη φορά μέχρι να φτάσει στη θέση του ΦΜ του ελατηρίου είναι: $E = |W_w| + |W_{Τολ.}| \Rightarrow$

$E = 20 \text{ A}$ και με την (4) $\Rightarrow E = \frac{320}{10\pi} \text{ j}$ ή $E = \frac{32}{\pi} \text{ j} < U_{ελ.(max)} = 16 \text{ j}$ Άρα το συσσωμάτωμα θα κινηθεί προς τα πάνω και θα περάσει από τη θέση του ΦΜ. Στη συνέχεια επιβραδύνεται και σταματάει μόνιμα γιατί $|W_x| = |T_{στ.ορ.}| = 10 \text{ N}$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που το συσσωμάτωμα θα σταματήσει για πρώτη φορά μέχρι τη στιγμή που θα σταματήσει μόνιμα.

$$\Delta K = W_w + W_{Τολ.} + W_{Fελ.} \Rightarrow 0 = -W_x S - T_{ολ} S + \frac{1}{2} K A^2$$

$$\Rightarrow 20 S = 16 \Rightarrow S = 0,8 \text{ m}$$

pananasgiannis@yahoo.gr