

Πρόταση για την άσκηση εξαναγκασμένης

Τερλεμές Σπύρος

spyrosssterlemes@gmail.com

4-1-2021

Έστω ότι έχουμε ένα σώμα μάζας m που δέχεται τις εξής δυνάμεις:

- $F = \Phi \eta \mu(\omega t + \delta)$
- $G = -kx$
- $D = -\left(\frac{B^2 l^2}{R}\right) \dot{x} = -b\dot{x}$

Τότε από δεύτερο νόμο έχουμε:

$$m\ddot{x} = \Phi \eta \mu(\omega t + \delta) - kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \Phi \eta \mu(\omega t + \delta)$$

(1)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς είναι:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

Με ρίζες:

$$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad \text{και} \quad \lambda' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$$

(2)

Η μορφή της λύσης της ομογενούς εξαρτάται από το αν η υπόριζη ποσότητα είναι θετική ή αρνητική. Σε κάθε περίπτωση είναι:

$$x(\sigma\mu) = e^{-\frac{b}{2m}t} [Ae^{\gamma t} + \Gamma e^{-\gamma t}]$$

(3)

Όπου $\gamma = \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4km}$. Αν τώρα το b^2 είναι μικρότερο από το $4km$ έχουμε:

$$x(\sigma\mu) = e^{-\frac{b}{2m}t} [A \sin(\gamma t) + \Gamma \cos(\gamma t)]$$

(4)

Μπορούμε να ακολουθήσουμε την μέθοδο Lagrange για να βρούμε την μερική λύση, αλλά είναι φανερό ότι μια μερική λύση είναι η:

$$x(\mu\epsilon\rho) = T \sin(\omega t + \delta) + E \cos(\omega t + \delta)$$

(5)

Με τους συντελεστές T και E να καθορίζονται από την ίδια την διαφορική. Αντικαθιστώντας την (5) στην (1) βρίσκουμε τα T και E. Εφόσον τώρα είναι γνωστά, η υπέρθεση θα δώσει την γενική λύση στην μορφή:

$$x = e^{-\frac{b}{2m}t} [A \sin(\gamma t) + \Gamma \cos(\gamma t)] + T \sin(\omega t + \delta) + E \cos(\omega t + \delta)$$

(6)

Εδώ οι συντελεστές A και B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ο μόνος τρόπος για να προκύψει λύση της μορφής:

$$x = A \sin(\Omega t + \Delta)$$

Είναι αν το πρώτο μέλος εξαφανιστεί. Αντικειμενικά τα A και Γ συνήθως δεν είναι τόσο μεγάλα, αλλά αντίστοιχα και το $b/2m$ δεν μπορεί να είναι και αυτό τόσο μεγάλο. Αν μάλιστα είναι μικρότερο της μονάδας (αρκετά πιθανό) τότε θα πρέπει σίγουρα να περάσει χρόνος μεγαλύτερος του 1 sec ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέο το πρώτο γινόμενο.

Με άλλα λόγια, το πρώτο γινόμενο εκφράζει μια φθίνουσα ταλάντωση. Οι υπόλοιποι όροι είναι η συνεισφορά της ημιτονοειδούς δύναμης F. Για να έχουμε μια προσεγγιστικά αρμονική λύση με σταθερό πλάτος, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι περνάει κάποιος χρόνος τέτοιος ώστε η τιμή της συνάρτησης:

$$g(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} [A \sin(\gamma t) + \Gamma \cos(\gamma t)]$$

Να είναι αμελητέα. Βλέπουμε ότι όταν ο χρόνος είναι πολύ μεγάλος, τότε η g πηγαίνει στο μηδέν. Άρα τελικά, για να έχουμε την εξίσωση κίνησης όπως αυτήν της άσκησης:

$$x = A \sin(\Omega t + \Delta)$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι έχει περάσει κάποιος χρόνος από την $t=0$.