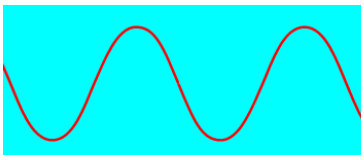
Εξισώσεις πάνω σε ένα κύμα



Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται χωρίς απώλειες κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει στην αρχή του άξονα Ο. Το σημείο Ο φτάνει σε θέση πλάτους, για πρώτη φορά, με απομάκρυνση y=+0,2m τη στιγμή $t_1=0,25s$, ενώ τη στιγμή αυτή έχει φτάσει σε σημείο Β στη θέση $x_1=0,5m$.

i) Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος, καθώς και η ταχύτητα του κύματος.

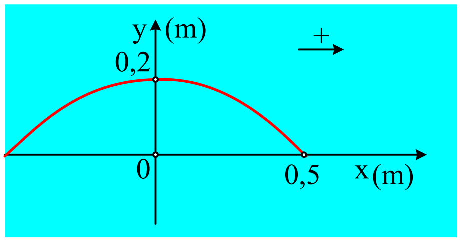
ii) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

iii) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t_2=2,75s$.

iv) Να παρασταθεί γραφικά η ταχύτητα του σημείου Β, σε συνάρτηση με το χρόνο από $0-t_2$.

v) Να δοθεί το στιγμιότυπο του κύματος για μια περιοχή του μέσου με $0 \le x \le 4m$, τη στιγμή t_2.

Απάντηση:



i) Αν για t=0 το κύμα φτάνει στη θέση x=0 και τη στιγμή $t_1=0,25s$ στη θέση $x_1=0,5m$, το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, οπότε η μορφή του μέσου τη στιγμή t_1 θα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Αλλά τότε το πλάτος του κύματος είναι A=0,2m, ενώ το χρονικό διάστημα για να μεταβεί το σημείο Ο, από τη θέση ισορροπίας του σε θέση πλάτους, είναι ίσο με το ¼ της περιόδου. Συνεπώς $T=4t_1=1s$.

Εξάλλου τη στιγμή t_1 το κύμα φτάνει στο σημείο Β στη θέση $x_1=0,5m$, συνεπώς η απόσταση αυτή είναι ίση με το ¼ λ, οπότε $\lambda=4x_1=2m$. Ενώ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση:

$$\upsilon=\frac{d}{\Delta t}=\frac{x_1}{t_1}=\frac{0,5m}{0,25s}=2m/s$$

(Εναλλακτικά $\upsilon=\lambda f=\frac{\lambda}{T}=\frac{2m}{1s}=2m/s$)

ii) Με βάση τις προηγούμενες τιμές και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σημείο Ο στο οποίο φτάνει το κύμα αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση, η εξίσωση του κύματος έχει τη γνωστή από την θεωρία μορφή:

$$y=A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right)\quad (S.I.)$$

iii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $x=x_1$ παίρνουμε την απομάκρυνση του σημείου Β:

$$y_B=A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)=0,2\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{0,5}{2}\right)=0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\quad (S.I.)\ \ \mu\varepsilon\ t\ge 0,25s$$

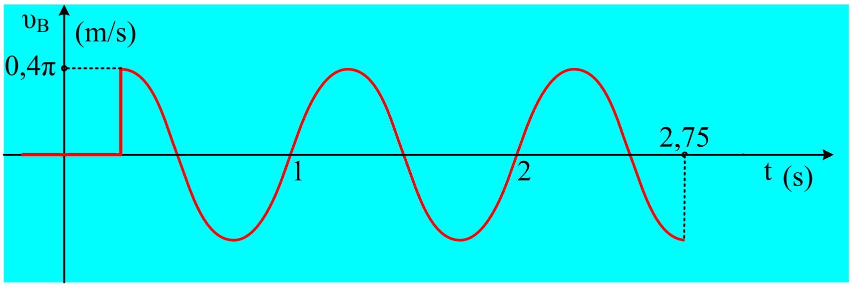
Συνεπώς τη στιγμή t_2 θα έχουμε για **το σημείο Β**:

$$\upsilon = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\upsilon_2 = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot 2,75 - \frac{\pi}{2}\right) = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(5\pi\right) = -0,4\pi \ m/s$$

$$a_2 = -A\omega^2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -0,2 \cdot 4\pi^2 \cdot \eta\mu\left(2\pi 2,75 - \frac{\pi}{2}\right) = -8 \cdot \eta\mu\left(5\pi\right) = 0$$

iv) Λαμβάνοντα υπόψη ότι το σημείο Β άρχισε να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1, τότε η γραφική παράσταση της σχέσης (1) θα έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος, μέχρι τη στιγμή $t=t_2=2,75s$:



v) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος $t=t_2=2,75s$ παίρνουμε:

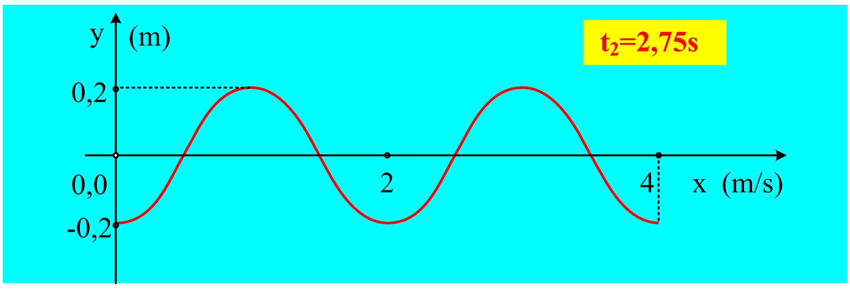
$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(2,75 - \frac{x}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(5,5\pi - 2\pi\frac{x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{3\pi}{2} - \pi x\right) = -0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x) \ (S.I.) \quad (2)$$

Μέχρι ποια θέση ισχύει η σχέση (2); Ισοδύναμα μέχρι ποιο σημείο έχει διαδοθεί το κύμα τη στιγμή t_2; Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$\upsilon = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow d_{max} = x_2 = \upsilon t_2 = 2 \cdot 2,75m = 5,5m$$

Οπότε στην περιοχή που μας ζητήθηκε $0 \le x \le 4m$, έχουμε διάδοση του κύματος, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2), έχει τη μορφή:



dmargaris@gmail.com