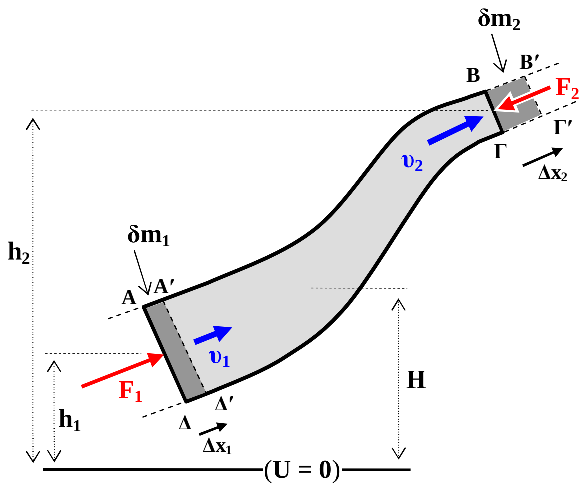
Νόμος Bernoulli

(Η απόδειξη του σχολικού λίγο πιο αναλυτικά)



Ιδανικό υγρό ρέει μέσα σε σωλήνα. Η ροή είναι στρωτή και μόνιμη. Η ταχύτητα ροής σε κάθε θέση παραμένει δηλαδή σταθερή (αμετάβλητο πεδίο ροής).

Θεωρούμε τμήμα ΑΒΓΔ της φλέβας του υγρού μέσα στο σωλήνα. Το τμήμα αυτό δέχεται τις εξής δυνάμεις:

- Το βάρος του.
- Τις πλευρικές δυνάμεις από τα τοιχώματα που είναι κάθετες στη ροή.
- Τις δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ από τα εξωτερικά τμήματα της φλέβας.

Σε μικρό χρόνο **δt** το τμήμα αυτό θα έχει μετακινηθεί σε νέα θέση Α′Β′Γ′Δ′.

Παρατηρούμε ότι οι δύο θέσεις επικαλύπτονται κατά το τμήμα Α′ΒΓΔ′, που έστω έχει μάζα **M**, κινητική ενέργεια **K**, και το κέντρο βάρους του βρίσκεται σε ύψος **H** από το επίπεδο αναφοράς. Ενώ το υγρό μάζας $\mathbf{\delta m_1}$ που βρισκόταν στη θέση ΑΑ′ΔΔ′ έχει «μεταφερθεί» λόγω της ροής στη θέση ΒΒ′Γ′Γ ως μάζα $\mathbf{\delta m_2}$ και προφανώς λόγω συνέχειας, $\mathbf{\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m}$.

Έτσι, η κινητική ενέργεια του τμήματος της φλέβας είναι,

αρχικά: $\mathbf{K_{\alpha\rho\chi} = K + ½\cdot\delta m_1\cdot\upsilon_1^2}$

τελικά: $\mathbf{K_{\tau\varepsilon\lambda} = K + ½\cdot\delta m_2\cdot\upsilon_2^2}$

και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας:

$$\mathbf{\Delta K = ½\cdot\delta m\cdot(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)}$$

Το έργο του βάρους του τμήματος αυτού του υγρού στο χρόνο **δt** είναι:

$$\mathbf{W_B = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = (M\cdot g\cdot H + \delta m_1\cdot g\cdot h_1) - (M\cdot g\cdot H + \delta m_2\cdot g\cdot h_2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{W_B = \delta m\cdot g\cdot(h_1 - h_2)}$$

Τέλος, αν $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ οι διατομές (ΑΔ) και (ΒΓ) και **ρ** η πυκνότητα του υγρού, ισχύει:

$$\mathbf{\rho = \frac{\delta m_1}{\delta V_1} = \frac{\delta m_2}{\delta V_2} = \frac{\delta m}{\delta V}}$$

και τα έργα των $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$ είναι αντίστοιχα:

$$\mathbf{W_1 = F_1 \cdot \delta x_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot \delta x_1 = P_1 \cdot \delta V_1 \quad \rightarrow \quad W_1 = P_1 \cdot \frac{\delta m}{\rho}}$$

$$\mathbf{W_2 = -F_2 \cdot \delta x_2 = -P_2 \cdot A_2 \cdot \delta x_2 = -P_2 \cdot \delta V_2 \quad \rightarrow \quad W_2 = -P_2 \cdot \frac{\delta m}{\rho}}$$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του τμήματος αυτού του υγρού προκύπτει:

$$\mathbf{\sum W = \Delta K \quad \rightarrow \quad W_B + W_1 + W_2 = \Delta K \quad \rightarrow}$$

$$\mathbf{\rightarrow \quad \delta m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + P_1 \cdot \frac{\delta m}{\rho} - P_2 \cdot \frac{\delta m}{\rho} = ½ \cdot \delta m \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \quad \rightarrow}$$

$$\mathbf{\rightarrow \quad P_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2}$$

ή αλλιώς:

$$\mathbf{P + \rho \cdot g \cdot h + ½ \cdot \rho \cdot \upsilon^2 = σταθ.}$$

Διονύσης Μητρόπουλος