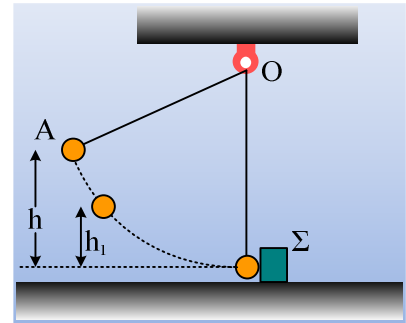


Μια ελαστική κρούση και η στροφορμή.

Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,1\text{kg}$ ηρεμεί δεμένη στο κάτω άκρο νήματος μήκους $\ell=3\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O , ενώ εφάπτεται σε ένα σώμα, το οποίο ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στο σημείο A , σε ύψος $h=1,25\text{m}$ και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την μετωπική και ελαστική κρούση της σφαίρας με το σώμα Σ , η σφαίρα επιστρέφει φτάνοντας σε ύψος $h_1=0,45\text{m}$, ενώ το σώμα Σ διανύει απόσταση $x=2\text{m}$, μέχρι να σταματήσει. Να υπολογιστούν:



- i) Η μάζα M του σώματος Σ .
- ii) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας που οφείλεται στην κρούση.
- iii) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου.
- iv) Τη στιγμή που η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος $h_2=0,25\text{m}$ κατά την άνοδό της, να βρεθούν:
 - a) Η στροφορμή της σφαίρας (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς το σημείο O , καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της αντίστοιχης στροφορμής.
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την κατακόρυφη θέση της σφαίρας. Κατά την κίνηση της σφαίρας η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Μετά την κρούση, έστω ότι η σφαίρα αποκτά ταχύτητα μέτρου v_1' και κινούμενη προς τα πάνω, φτάνει σε ύψος h_1 , οπότε, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε από την (1), $v_1' = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$. Αλλά οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κεντρική ελαστική τους κρούση δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v_1' = \frac{m-M}{m+M}v_1 \quad (2) \text{ και } v_2' = \frac{2m}{m+M}v_1 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$v_1' = \frac{m-M}{m+M}v_1 \rightarrow -3 = \frac{0,1-M}{0,1+M}5 \text{ από όπου } M=0,4\text{kg}.$$

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική παίρνουμε:

$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_{1\mu\epsilon\tau} - \vec{P}_{1\pi\rho} \rightarrow$$

$$\Delta P_1 = m v_1' - m v_1 = 0,1 \cdot (-3) \text{kgm/s} - 0,1 \cdot 5 \text{kgm/s} = -0,8 \text{kgm/s}$$

iii) Με αντικατάσταση στην σχέση (3) βρίσκουμε:

$$v_2' = \frac{2m}{m+M} v_1 = \frac{2 \cdot 0,1}{0,1+0,4} 5 \text{m/s} = 2 \text{m/s}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σώμα Σ για την κίνησή του μετά την κρούση και παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2} + W_T + W_{T'} \rightarrow 0 - \frac{1}{2} M v_2'^2 = 0 + 0 - T x \quad (5)$$

Αλλά το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = Mg$, οπότε $T = \mu Mg$ και η σχέση (5) δίνει:

$$\frac{1}{2} M v_2'^2 = \mu M g x \rightarrow \mu = \frac{v_2'^2}{2 g x} = \frac{2^2}{2 \cdot 10 \cdot 2} = 0,1$$

iv) Έστω ότι στη θέση που η σφαίρα έχει ανέλθει κατά h_2 , μετά την κρούση, έχει ταχύτητα V . Εφαρμόζοντας ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της κατώτερης θέσης και της θέσης αυτής παίρνουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_1'^2 + 0 = \frac{1}{2} m V^2 + m g h_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_1'^2 + 0 = \frac{1}{2} m V^2 + m g h_2 \rightarrow V = \sqrt{v_1'^2 - 2 g h_2} \rightarrow$$

$$V = \sqrt{v_1'^2 - 2 g h_2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,25} \text{m/s} = 2 \text{m/s}$$

α) Στη θέση αυτή η στροφορμή της σφαίρας ως προς το O, είναι πάνω στην κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς στο σημείο O με φορά προς τα μέσα (βλέπε σχήμα) και μέτρο:

$$L = m \cdot V \cdot \ell = 0,1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

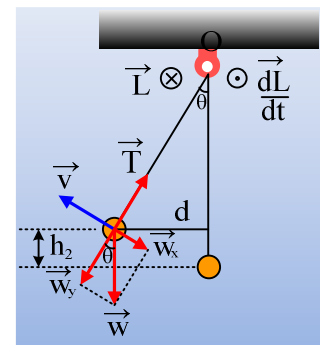
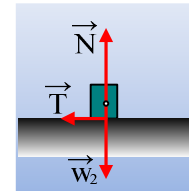
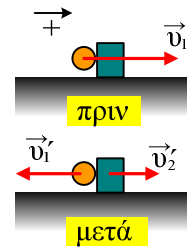
Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, έχει την ίδια διεύθυνση, αλλά φορά προς τα έξω και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = w_x \ell = m g \ell \cdot \eta \mu \vartheta$$

$$\text{Αλλά } \eta \mu \vartheta = \frac{d}{\ell} = \frac{\sqrt{\ell^2 - (\ell - h_2)^2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3^2 - 2,75^2}}{3} = 0,4, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{dL}{dt} = m g \ell \cdot \eta \mu \vartheta = 0,1 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = -mg\eta\mu\vartheta \cdot V = -0,1 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot 2J/s = -0,8J/s$$

Σχόλιο.

Θεωρώντας τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού θετική, μπορούμε να γράψουμε για τις αλγεβρικές τιμές στροφορμής και ρυθμού μεταβολής της:

$$L = m \cdot V \cdot \ell = 0,1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = -w_x \ell = -mg\ell \cdot \eta\mu\vartheta = -1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

dmargaris@sch.gr