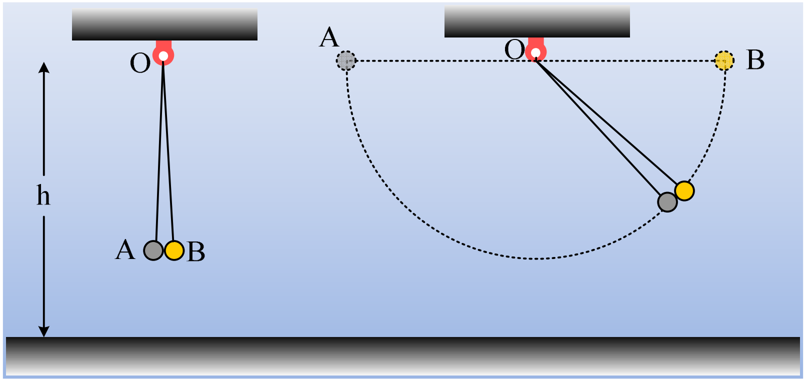
Δυο σφαίρες που δεν αφέθηκαν ταυτόχρονα.



Δυο μικρές μεταλλικές σφαίρες Α και Β ηρεμούν στα κάτω άκρα δύο ίσων νημάτων με το ίδιο μήκος. Τα νήματα έχουν δεθεί στο ίδιο σημείο Ο, σε ύψος h=1,8m από το έδαφος. Εκτρέπουμε τις δυο σφαίρες ώστε τα νήματα να γίνουν οριζόντια, όπως στο διπλανό σχήμα. Σε μια στιγμή αφήνουμε πρώτα την Α σφαίρα και μετά από λίγο την Β να κινηθούν. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά σε μια ενδιάμεση θέση. Στη διάρκεια της κρούσης κόβεται το νήμα που συγκρατεί τη σφαίρα Β, η οποία τελικά φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα υ=6m/s.

i) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στην Β σφαίρα από την Α, στη διάρκεια της κρούσης.

ii) Να εξετάσετε αν η Α σφαίρα θα φτάσει ποτέ στην οριζόντια θέση από την οποία αφέθηκε η Β σφαίρα.

iii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αντικαθιστώντας την Β σφαίρα με άλλη ίσης ακτίνας και διπλάσιας μάζας (αλλάζουμε και το νήμα, για να μην κοπεί!!!). Μετά την κεντρική και ελαστική κρούση των δύο σφαιρών, περίπου στην ίδια με την προηγούμενη θέση, οι σφαίρες θα ξαναφτάσουν στις αρχικές θέσεις τους, στην οριζόντια διεύθυνση;

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε για την κίνηση της Β σφαίρας το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση σε ύψος h, μέχρι να φτάσει στο έδαφος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_F$$

Όπου W_F είναι το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στη Β σφαίρα στη διάρκεια της κρούσης, από την Α σφαίρα, οπότε:

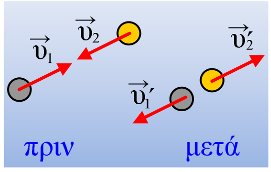
$$W_F = K_{τελ} - W_w = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgh = m\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 - gh\right) = m\left(\frac{1}{2}6^2 - 10\cdot 1{,}8\right) = 0$$

ii) Α η θέση σύγκρουσης απέχει κατακόρυφα κατά y, από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο ανάρτησης Ο, τότε η ταχύτητα μιας σφαίρας θα υπολογιστεί με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν στην χαμηλότερη θέση:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$0 + mgy = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \rightarrow \upsilon = \sqrt{2gy}$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι οι δυο σφαίρες, ανεξάρτητα της μάζας που έχουν και της διαφορετικής τροχιάς που εκτελούν, έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.



Αν έρθουμε τώρα στο αποτέλεσμα του i) ερωτήματος σημαίνει ότι η σφαίρα Β θα έχει μετά την κρούση ταχύτητα ίδιου μέτρου με την ταχύτητά της πριν την κρούση. Αλλά κρούση βέβαια υπήρξε, οπότε η μόνη δυνατή κατάσταση είναι η ταχύτητα να αλλάξει κατεύθυνση, αλλά όχι μέτρο. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο, αν οι δυο σφαίρες ανταλλάξουν ταχύτητες, πράγμα που συμβαίνει αν έχουν ίσες μάζες. Πράγματι η κατάσταση, είναι αυτή του διπλανού σχήματος, όπου για τα μέτρα των ταχυτήτων, πριν και μετά την κρούση θα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_1' = \upsilon_2'$$

Μιλώντας τώρα για την Α σφαίρα, ξεκινά να κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = \sqrt{2gy}$ και θα φτάσει σε μέγιστο ύψος h_1, το οποίο υπολογίζεται ξανά με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = 0 + mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{2gy}\right)^2}{2g} = y$$

Δηλαδή η σφαίρα, θα επιστρέψει στην αρχική της θέση και στη συνέχεια διαγράφοντας ημικύκλιο θα φτάσει και στην αρχική θέση από την οποία αφέθηκε και η σφαίρα Β.

iii) Με βάση τα προηγούμενα και πάλι οι δυο σφαίρες θα φτάσουν στο σημείο σύγκρουσης με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \sqrt{2gy}$. Μετά την μετωπική ελαστική μεταξύ τους κρούση θα έχουν ταχύτητες:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{m - 2m}{m + 2m}\sqrt{2gy} + \frac{2 \cdot 2m}{m + 2m}\left(-\sqrt{2gy}\right) = -\frac{5}{3}\sqrt{2gy}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2m}{m + 2m}\sqrt{2gy} + \frac{2m - m}{m + 2m}\left(-\sqrt{2gy}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2gy}$$

Όπου η αρχική κατεύθυνση της ταχύτητας της Α σφαίρας θεωρήθηκε θετική.

Με εφαρμογή τώρα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για κάθε σφαίρα βρίσκουμε το ύψος, σε σχέση με τη θέση κρούσης, που θα φτάσει. Έτσι έχουμε:

Για την Α σφαίρα:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 = mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{\frac{25}{9}2gy}{2g} = \frac{50}{9}y > y$$

Ενώ για την Β σφαίρα:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2+0=m_2gh_2 \rightarrow h_2=\frac{\upsilon_2'^2}{2g}=\frac{\frac{1}{9}2gy}{2g}=\frac{1}{9}y<y$$

Βλέπουμε ότι η Α σφαίρα θα φτάσει σε μεγαλύτερο ύψος από την αρχική θέση, από την οποία αφέθηκε, οπότε θα ξαναπεράσει από αυτήν, πράγμα που δεν θα συμβεί για την Β σφαίρα.

dmargaris@sch.gr