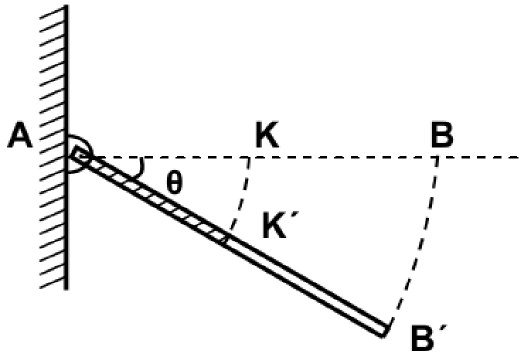
Φ.Ε: Ροπή Αδράνειας και θεώρημα Steiner

1) Μια ισοπαχής δοκός ΑΒ αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα ΑΚ και ΚΒ, μήκους $\frac{L}{2}$ το καθένα, με μάζες $m_1 = 4m$ και m_2=m, αντίστοιχα. Τα κομμάτια αυτά είναι κολλημένα μεταξύ τους στο σημείο Κ, ώστε να σχηματίζουν τη δοκό ΑΒ μήκους L .



Να δείξετε ότι η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα κάθετο σε αυτή ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α, έχει τιμή: $I_A = \frac{11}{12}mL^2$

Η ροπή αδράνειας ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας Μ και μήκους L ως προς άξονα κάθετο στο μέσο της είναι : $I = \frac{1}{12}ML^2$

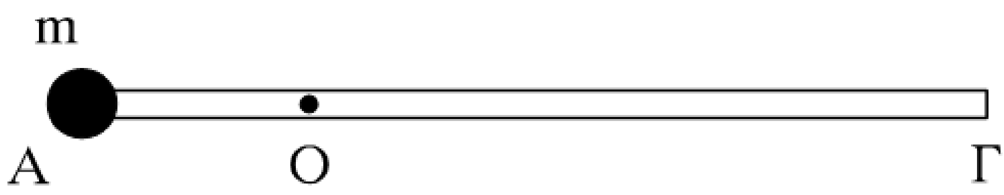
2) Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους L και μάζας Μ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο σε αυτή, ο οποίος διέρχεται από σημείο Κ της ράβδου και απέχει από το άκρο Γ απόσταση $d = \frac{L}{6}$. Στο άκρο Γ τοποθετούμε σώμα μάζας m **αμελητέων διαστάσεων** και το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση.

Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού **ράβδος - σώμα** ως προς τον άξονα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $I = \frac{1}{4}ML^2$

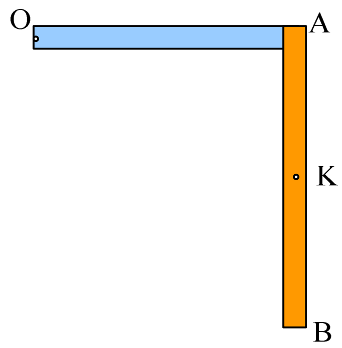
3) Λεπτή ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους L και μάζας M μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο χωρίς τριβές, ο οποίος διέρχεται από το σημείο Ο της ράβδου. Η απόσταση του σημείου Ο από το Α είναι $\frac{L}{4}$. Στο άκρο Α της ράβδου στερεώνεται σημειακή μάζα m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση



Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακή μάζα ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο ο οποίος διέρχεται από το άκρο Γ.

Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $I_Γ = \frac{4}{3}ML^2$



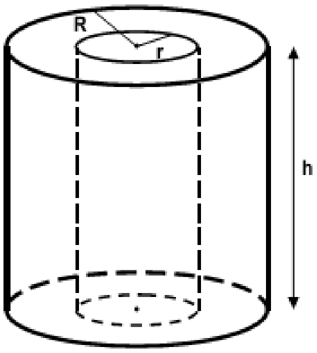
4) Οι ομογενείς ράβδοι ΟΑ και ΑΒ με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ και ίσα μήκη $L_1 = L_2 = L$, είναι συγκολλημένες όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό τους οποίος διέρχεται από το άκρο Ο.

Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $I_o = \frac{5}{3}ML^2$

5) Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h, αφαιρούμε πλήρως έναν ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r και μάζας m, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως

προς τον άξονά του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος.

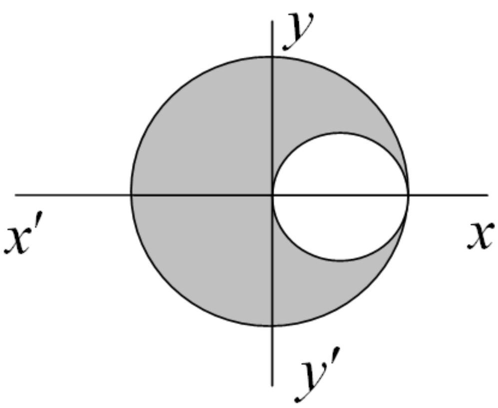


Η ροπή αδράνειας *I* συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας *M* και ακτίνας *R*, ως προς τον άξονα του είναι: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$I_K = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 \qquad \begin{matrix} M = d\pi R^2 h \\ m = d\pi r^2 h \end{matrix} \Rightarrow m = M\frac{r^2}{R^2} \qquad I_K = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

6) Το εικονιζόμενο ομογενές σώμα έχει προκύψει από σφαίρα ακτίνας R στην οποία δημιουργήσαμε σφαιρική κοιλότητα ακτίνας r=R/2.



Να συγκρίνετε τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα χ'χ με τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα y'y

Η ροπή αδράνειας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι: $I=2mR^2/5$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$I_{x'x} = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}mr^2 \qquad \begin{matrix} M = d\frac{4}{3}\pi R^3 \\ m = d\frac{4}{3}\pi r^3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad m = M\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow m = \frac{M}{8}$$

$$I_{x'x} = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}\frac{M}{8}\frac{R^2}{4} = \frac{2}{5}MR^2(1 - \frac{1}{32}) \Rightarrow I_{x'x} = \frac{31}{80}MR^2$$

Άξονας $y'y$

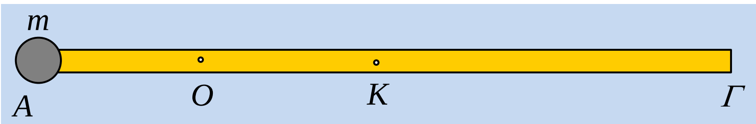
Η ροπή αδράνειας της σφαίρας που λείπει, μάζας m, υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner:

$$I'_m = I_{CM} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}m\frac{R^2}{4} + m\frac{R^2}{4} = \frac{7mR^2}{20} = \frac{7}{160}MR^2$$

Άρα:

$$I_{y'y} = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{7}{160}MR^2 \Rightarrow I_{y'y} = \frac{57}{160}MR^2 \quad \text{Συνεπώς:} \quad \frac{I_{x'x}}{I_{y'y}} = \frac{62}{57} > 1$$

7) Στο άκρο Α μιας λεπτής ομογενούς ράβδος ΑΓ μήκους L και μάζας M , στερεώνεται σημειακή μάζα m=M/2 **αμελητέων διαστάσεων.**



Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$

Α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος-σημειακή μάζα ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο Γ και είναι κάθετος στη ράβδο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ $I_\Gamma = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{M}{2}L^2 = \frac{5}{6}ML^2$ (1)

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης