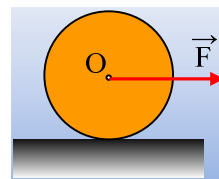


Ολίσθηση και κύλιση τροχού.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας $M=10\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,5\text{m}$, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,3$. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκείται στο κέντρο O του τροχού οριζόντια δύναμη F μέτρου $F_1=100\text{N}$, ενώ τη στιγμή $t_1=2\text{s}$, το μέτρο της δύναμης μειώνεται στην τιμή $F_2=60\text{N}$.

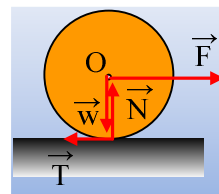


- i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του τροχού τη στιγμή t_1 .
- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του κέντρου O του τροχού μέχρι τη στιγμή $t_2=4\text{s}$.
- iii) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, μέχρι την παραπάνω στιγμή t_2 , εξαιτίας της τριβής που ασκείται στον τροχό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Το ερώτημα είναι τι κίνηση κάνει ο τροχός από $0-4\text{s}$; Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = Ma_{cm} \rightarrow F_1 - T = Ma_{cm} \quad (1)$

Στροφική κίνηση: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F_1 = \frac{3}{2} Ma_{cm} \quad (4)$$

$$a_{cm} = \frac{2F_1}{3M} \rightarrow T = \frac{F_1}{3} = 33,3\text{N}$$

Αλλά η μέγιστη τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, η οριακή στατική τριβή έχει μέτρο:

$$T_{op} = T_{ol} = \mu \cdot N = \mu \cdot Mg = 0,3 \cdot 10 \cdot 10\text{N} = 30\text{N}.$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ήταν λάθος και ο τροχός, στρέφεται μεν αλλά και ολισθαίνει. Αλλά τότε από την (1) παίρνουμε:

$$a_{cm} = \frac{F_1 - T_{ol}}{M} = \frac{100\text{N} - 30\text{N}}{10\text{kg}} = 7\text{m/s}^2$$

Οπότε τη στιγμή $t_1=2\text{s}$ το κέντρο O του τροχού έχει ταχύτητα $v_{cm} = a_{cm}t_1 = 14\text{m/s}$.

Εξάλλου από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \cdot 30}{10 \cdot 0,5} \text{rad/s}^2 = 12\text{rad/s}^2.$$

Και τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 12 \cdot 2 \text{ rad/s} = 24\text{rad/s}.$$

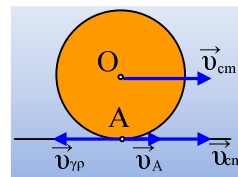
Με βάση αυτά η κινητική ενέργεια του τροχού τη στιγμή αυτή είναι:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 14^2 J + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 10 \cdot 0,5^2 \cdot 24^2 J = 1340 J$$

- ii) Τη στιγμή t_1 μικραίνει το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_2=60N$, ενώ ο τροχός συνεχίζει να ολισθαίνει, αφού αν πάρουμε την ταχύτητα του σημείου επαφής A του τροχού με το έδαφος, θα βρούμε:

$$v_A = v_{cm} - \omega R = 14 \text{ m/s} - 24 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.



Αλλά τότε από την σχέση (1) βρίσκουμε τώρα ότι ο άξονας του τροχού επιταχύνεται με επιτάχυνση κέντρου μάζας $a_{cm1} = \frac{F_2 - T_{ολ}}{M} = \frac{60N - 30N}{10kg} = 3 \text{ m/s}^2$, ενώ η γωνιακή του επιτάχυνση συνεχίζει να έχει

μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\gamma} = 12 \text{ rad/s}^2$, όπως και πριν, αφού δεν έχει αλλάξει η ασκούμενη τριβή, η οποία συνεχίζει να είναι τριβή ολίσθησης.

Αυτό σημαίνει ότι ο τροχός συνεχίζεται να επιταχύνεται μεταφορικά και να αυξάνεται η v_{cm} και στροφικά, οπότε αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα, άρα και η γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma p}$ του σημείου A. Αλλά ενώ ο ρυθμός μεταβολής της $v_{\gamma p}$ είναι όση και πριν την μείωση του μέτρου της δύναμης, ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της v_{cm} μειώθηκε. Συνεπώς πολύ σύντομα οι δυο παραπάνω ταχύτητες θα αποκτήσουν ίσα μέτρα και ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Οπότε για την κίνηση για $t > 2s$, έχουμε:

$$v_{cm} = v_2 + a_{cm1} \cdot (t-2) \quad \text{και} \quad v_{\gamma p} = [\omega_2 + \alpha_{\gamma\omega\gamma 2} \cdot (t-2)] \cdot R \quad (\text{S.I.})$$

εξισώνοντας τα πρώτα μέλη παίρνουμε:

$$14 + 3(t-2) = [24 + 12(t-2)] \cdot 0,5 \rightarrow t = 8/3 \text{ s.}$$

Τη στιγμή αυτή ο τροχός παύει να ολισθαίνει, έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας:

$$v'_{cm} = v_2 + a_{cm1} \cdot (t-2) = 14 \text{ m/s} + 3 \cdot \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \text{ m/s} = 16 \text{ m/s.}$$

Από τη στιγμή $t' = 8/3s$ που ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει η σχέση (4) από την οποία

βρίσκουμε $a_{cm2} = \frac{2F_2}{3M} = \frac{2 \cdot 60}{3 \cdot 10} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$ με αποτέλεσμα η ταχύτητά του τη στιγμή $t_2 = 4s$ θα εί-

ναι:

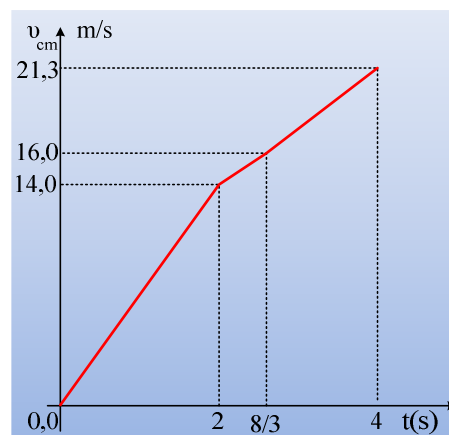
$$v_{cm} = v'_{cm} + a_{cm2} \left(t - \frac{8}{3} \right) = 16 \text{ m/s} + 4 \left(4 - \frac{8}{3} \right) \text{ m/s} = 21,3 \text{ m/s}$$

Με βάση τα παραπάνω η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος

- iii) Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι κατά απόλυτο τιμή ίση με το έργο της τριβής ολίσθησης:

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = |W_T| = T_{ολ} \cdot s$$

Όπου s η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της τριβής.



Αλλά από 0-2s το σημείο A έχει τις επιταχύνσεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου $a_1 = a_{cm} - a_{επ} = a_{cm} - a_{γων} \cdot R = 7 \text{ m/s}^2 - 12 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2$, οπότε μετατοπίζεται κατά $x_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 \text{ m} = 2 \text{ m}$.

Εξάλλου με την ίδια λογική από 2s-8/3s η επιτάχυνση του σημείου A θα είναι:

$$a_2 = a_{cm} - a_{επ} = a_{cm} - a_{γων} \cdot R = 3 \text{ m/s}^2 - 12 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = -3 \text{ m/s}^2$$

και μετατοπίζεται κατά $x_2 = v_{2A} \cdot (t-2) + \frac{1}{2} a_2 \cdot (t-2)^2$ όπου $v_{2A} = 2 \text{ m/s}$

$$x_2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 2 \right) + \frac{1}{2} (-3) \cdot \left(\frac{8}{3} - 2 \right)^2 \text{ m} \approx 0,67 \text{ m}$$

Έτσι η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική θα είναι:

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = T_{ολ} \cdot s = T_{ολ} (x_1 + x_2) = 30 \cdot (2 + 0,67) \text{ J} = 80 \text{ J}.$$

Σχόλια.

- 1) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την παραπάνω θερμική ενέργεια, βρίσκοντας πόσο γλίστρησε ο τροχός. Έτσι αν γλίστρησε κατά s, τότε η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική θα είναι ίση με:

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = T_{ολ} \cdot s$$

Όπου $s = x_{cm} - \theta \cdot R$

ενώ θ η γωνία κατά την οποία στρέφεται ο τροχός στο διάστημα της ολίσθησης.

- 2) Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να εφαρμόζαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. χωριστά για μεταφορική και στροφική κίνηση. Έτσι θα είχαμε για το διάστημα που ο τροχός ολισθαίνει:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_T$$

Όπου το έργο της τριβής θα προκύψει αρνητικό, μετρώντας την μείωση της μεταφορικής κινητικής ενέργειας, την οφειλόμενη στην τριβή.

$$\text{Στροφική κίνηση: } K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{\tau T}$$

Όπου το αντίστοιχο έργο της ροπής της τριβής είναι θετικό, μετρώντας την ενέργεια που μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική.

Η διαφορά $|W_T| - W_{\tau T}$ εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται από τον τροχό και δεν γίνεται κινητική, συνεπώς την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική.

- 3) Και βέβαια τελευταίο, αλλά ίσως το πιο σημαντικό από άποψη θεωρίας, είναι να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας για το χρονικό διάστημα της ολίσθησης.

Η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης F, κατά ένα μέρος εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας του τροχού και το υπόλοιπο μετατρέ-

πεται σε θερμική ενέργεια:

$$W_F = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + Q$$

