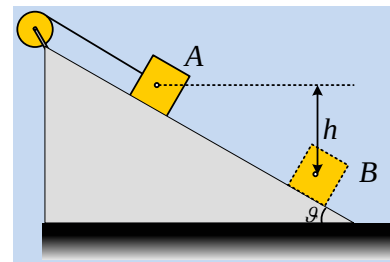


Οι ενέργειες σε ένα σύστημα και σε έναν «τροχό».

Στην κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου έχει στερεωθεί μια τροχαλία μάζας $m=3\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$, στο αυλάκι της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε έναν κύβο μάζας $M=m$. Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο τον κύβο να γλιστρήσει από ένα σημείο A. Το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

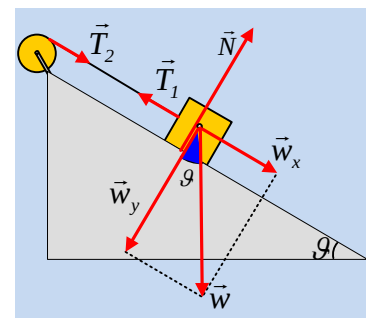


- i) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κύβου και της τροχαλίας, τη στιγμή που ο κύβος περνά από σημείο B, τέτοιο ώστε το κέντρο μάζας του να απέχει κατακόρυφα κατά $h=2\text{m}$ από τη θέση A.
- ii) Επαναλάβουμε το πείραμα, αντικαθιστώντας τον κύβο με κύλινδρο ίσης μάζας, όπου το νήμα, με κατάλληλο μηχανισμό, συνδέεται στον άξονά του. Να εξετάσετε αν υπάρξει κάποια αλλαγή, στην κίνηση των σωμάτων.
- ii) Σε ένα άλλο κεκλιμένο επίπεδο ίδιας κλίσης, αφήνουμε ελεύθερη την παραπάνω τροχαλία (μόνο το δίσκο), η οποία κυλιέται και μετά από λίγο περνά από ένα σημείο B, τέτοιο ώστε το κέντρο μάζας της να βρίσκεται 2m χαμηλότερα από την αρχική θέση που ξεκίνησε. Να βρεθεί η κινητική της ενέργεια στη θέση B. Ποιο μέρος της ενέργειας αυτής αντιστοιχεί στην μεταφορική και ποιο στην περιστροφική της κίνηση;

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο καθώς και οι δυνάμεις T_1 και T_2 που το αβαρές νήμα ασκεί σε κύβο και τροχαλία (η τάση του νήματος), όπου $T_1=T_2$, αφού το νήμα είναι αβαρές.

Αλλά τότε τα έργα των δύο αυτών δυνάμεων είναι αντίθετα, πράγμα που σημαίνει ότι όση ενέργεια αφαιρείται από τον κύβο (μέσω του έργου της τάσης του νήματος) μεταφέρεται στην τροχαλία. Αλλά

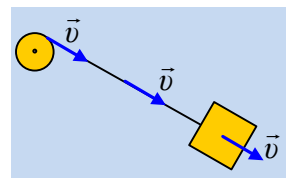


τότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο επί του συστήματος είναι το βάρος του κύβου, δύναμη συντηρητική. Έτσι θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας του κύβου στη θέση B, θα έχουμε:

$$K_{ap/K} + K_{ap/\tau} + U_{ap/K} + U_{ap/\tau} = K_{\tau/K} + K_{\tau/\tau} + U_{\tau/K} + U_{\tau/\tau} \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \quad (1)$$

Αλλά η ταχύτητα του κύβου κάθε στιγμή, είναι και ίση με την ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος, συνεπώς και με την ταχύτητα, του σημείου του νήματος που άπτεται της τροχαλίας. Οπότε $v_K = v_{\gamma\phi} = \omega \cdot R$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:



$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \rightarrow$$

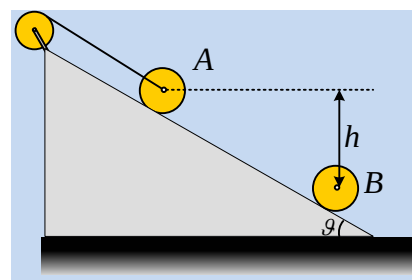
$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} Mv^2 \rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \frac{1}{2} Mv^2 = Mgh \rightarrow$$

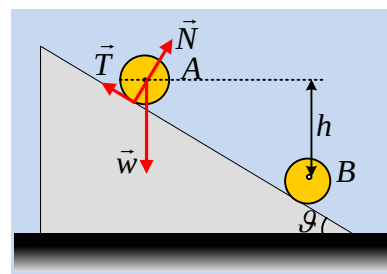
$$K_K = \frac{2}{3} Mgh = \frac{2}{3} 3 \cdot 10 \cdot 2J = 40J$$

$$\text{Ενώ } K_{\tau\phi} = \frac{1}{3} Mgh = \frac{1}{3} 3 \cdot 10 \cdot 2J = 20J$$

ii) Στην περίπτωση που τη θέση του κύβου την πάρει ένας κύλινδρος δεν θα αλλάξει τίποτα! Το επίπεδο είναι λείο, οπότε δεν θα εξασκηθεί καμιά ροπή η οποία να τον θέσει σε περιστροφή και θα εκτελέσει την ίδια μεταφορική κίνηση με τον κύβο.



iii) Στην τροχαλία εκτός από το βάρος και την δύναμη στήριξης N, θα αναπτυχθεί και δύναμη στατικής τριβής, με αποτέλεσμα να κυλίνεται κατά μήκος του επιπέδου. Αλλά η στατική τριβή δεν παράγει έργο αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της, συνεπώς η μηχανική ενέργεια διατηρείται:



$$K_{\alpha\phi} + U_{\alpha\phi} = K_{\tau} + U_{\tau} \rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \rightarrow$$

Αλλά αφού η τροχαλία κυλίνεται $v_{cm} = \omega \cdot R$ και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{4} mv_{cm}^2 = K = 60J$$

ενώ:

$$K_{\mu} = \frac{2}{3} mgh = \frac{2}{3} 3 \cdot 10 \cdot 2J = 40J \text{ και}$$

$$K_{\sigma\tau} = \frac{1}{3} mgh = \frac{1}{3} 3 \cdot 10 \cdot 2J = 20J$$

Σχόλια:

Τα σχόλια δικά σας....



Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης