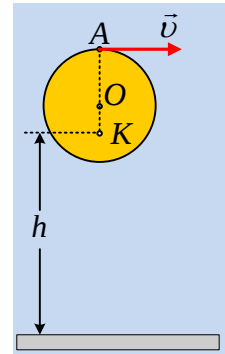


Ο δίσκος και η ταχύτητα ενός σημείου.

Ένας ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο του K , το οποίο απέχει από το κέντρο του O απόσταση $(KO) = \frac{1}{2} R$. Ένα σημείο A στην περιφέρεια του δίσκου έχει ταχύτητα v , τη στιγμή που η ακτίνα AO είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του O , δίνεται από την εξίσωση $I = \frac{1}{2} MR^2$, να υπολογιστούν συναρτήσει των M , R , g και v :



- i) Η κινητική ενέργεια του δίσκου στην παραπάνω θέση.
- ii) Η μέγιστη ταχύτητα του σημείου A στη διάρκεια της περιστροφής του δίσκου.
- iii) Αν τη στιγμή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ο άξονας περιστροφής σπάσει και ο δίσκος φτάνει στο έδαφος με πρώτο σημείο επαφής το σημείο A , να βρεθεί το ελάχιστο ύψος h από το έδαφος, που βρισκόταν ο άξονας περιστροφής.
- iv) Η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου, στην παραπάνω περίπτωση.

Απάντηση:

- i) Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner:

$$I_K = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2} MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} MR^2$$

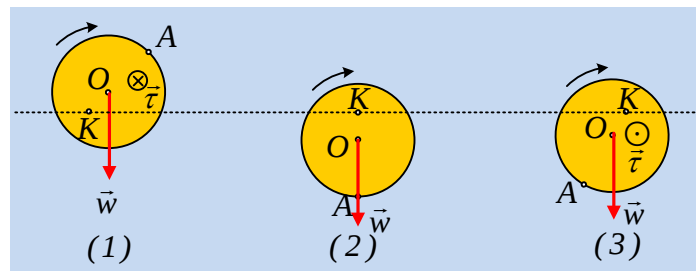
Εξάλλου το σημείο A έχει ταχύτητα v που συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου με τη σχέση $v = \omega \cdot r$, οπότε:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{\frac{3}{2}R} = \frac{2v}{3R}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K = \frac{1}{2} I_K \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{4} MR^2 \left(\frac{2v}{3R} \right)^2 = \frac{1}{6} Mv^2$$

- ii) Αν πάρουμε το δίσκο μετά από λίγο, στη θέση που δείχνει το σχήμα (1), η ροπή του βάρους επιταχύνει τον δίσκο αυξάνοντας την γωνιακή του ταχύτητα.



Αυτό θα συμβαίνει μέχρι η ακτίνα OA να γίνει κατακόρυφη σχ. (2), αφού από κει και πέρα η ασκού-

μενη ροπή αλλάζει φορά και ο δίσκος επιβραδύνεται.

Κατά συνέπεια ο δίσκος αποκτά μέγιστη γωνιακή ταχύτητα στη θέση που φαίνεται στο σχήμα (2), οπότε στην ίδια θέση το σημείο Α θα έχει τη μέγιστη (γραμμική) ταχύτητα.

Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση του κέντρου μάζας Ο στη θέση (2) ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται, μιας και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, παίρνουμε:

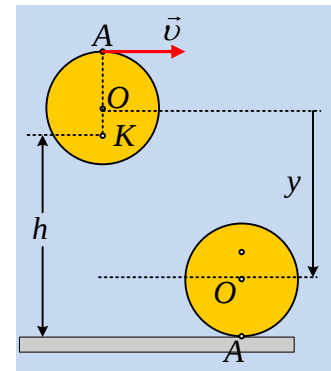
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_K \omega_1^2 + MgR = \frac{1}{2} I_K \omega_2^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{6} Mv^2 + MgR = \frac{1}{2} \frac{3}{4} MR^2 \left(\frac{2v_2}{3R} \right)^2 \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v^2 + 6Rg}$$

- iii) Τη στιγμή που σπάει ο άξονας, το κέντρο μάζας Ο έχει οριζόντια ταχύτητα $v_{\text{cm}} = \omega \cdot \frac{1}{2} R$ με αποτέλεσμα να εκτελέσει οριζόντια βολή (όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση). Με βάση την αρχή ανεξαρτησίας, η κίνηση αυτή αναλύεται σε μια ευθύγραμμη ομαλή στον οριζόντιο άξονα x και μια ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα. Αλλά αφού ο δίσκος έρχεται σε επαφή με το έδαφος με το σημείο Α, ο χρόνος πτώσης θα είναι $t = kT + \frac{1}{2} T$ με $k \in \mathbb{Z}$, όπου T η σταθερή περίοδος περιστροφής, αφού δεν ασκείται καμιά ροπή στον δίσκο, κατά την πτώση. Αλλά τότε



το ελάχιστο ύψος θα αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{3\pi R}{2v}$ και η αντίστοιχη μετατόπιση του κέντρου Ο θα είναι:

$$y = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{3\pi R}{2v} \right)^2 = \frac{9}{8} \frac{\pi^2 g R^2}{v^2}$$

$$\text{Αλλά τότε } h = y + R - \frac{R}{2} = \frac{9}{8} \frac{\pi^2 g R^2}{v^2} + \frac{R}{2}$$

- iv) Θεωρώντας τώρα επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Ο του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, θα έχουμε:

$$K_1 + U_1 = K_\tau + U_\tau \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_K \omega_1^2 + Mgy = K_{\tau\text{ελ}} \rightarrow$$

$$K_{\tau\text{ελ}} = \frac{1}{6} Mv^2 + Mg \frac{9}{8} \frac{\pi^2 g R^2}{v^2} = \frac{1}{6} Mv^2 + \frac{9}{8} \frac{Mg^2 \pi^2 R^2}{v^2}$$

Σχόλιο:

Στην παραπάνω εξίσωση θεωρήσαμε ότι η αρχική κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση με $\frac{1}{2} I_K \omega_1^2$, όση ήταν δηλαδή και πριν το σπάσιμο του άξονα. Θα μπορούσαμε βέβαια να γράψουμε:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2$$

Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του δίσκου.

Αλλά όμως:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2 = \frac{1}{2} M \left(\omega_1 \frac{R}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2 = \frac{3}{8} M R^2 \omega_1^2 \rightarrow$$

$$K_{αρχ} = \frac{3}{8} M R^2 \left(\frac{2v}{3R} \right)^2 = \frac{1}{6} M v^2 = \frac{1}{2} I_K \omega_1^2.$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιάζεις πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης