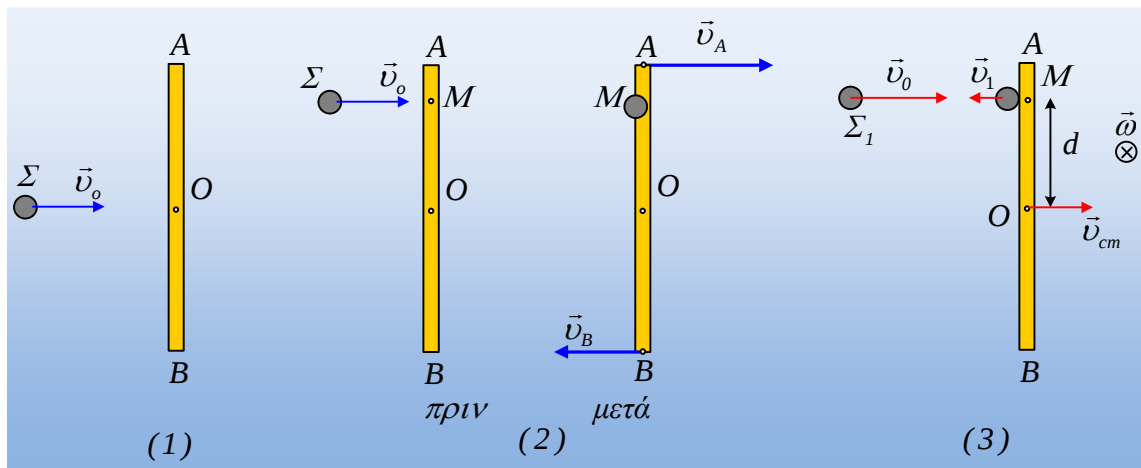


Κρούση και κέντρο μάζας.

Μια ομογενής ράβδος μάζας $3m$ και μήκους $\ell = 6m$ ηρεμεί σε οριζόντια θέση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα $v_0 = 8m/s$, σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και προσκολλάται σε αυτήν, στο μέσον της O .

i) Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα το σώμα Σ προσκολλάται στο σημείο M της ράβδου δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S . Αμέσως μετά την κρούση τα άκρα A και B της ράβδου έχουν ταχύτητες μέτρων $v_A = 4,5m/s$ και $v_B = 1,5m/s$, όπως στο (2) σχήμα. Να βρεθούν:



- ii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας K και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού S .
- iii) Η θέση του κέντρου μάζας K γύρω από το οποίο στρέφεται το σύστημα μετά την κρούση.
- iv) Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή, το αντίστοιχο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Σε μια επανάληψη του πειράματος, το σώμα Σ αντικαθίσταται από άλλο Σ_1 ίδιας μάζας, το οποίο κτυπά ξανά τη ράβδο στο σημείο M , με την ίδια ταχύτητα v_0 . Μετά την κρούση το Σ_1 , κινείται προς τ' αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 1m/s$.

- v) Ποιο είναι τώρα το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της

$$I = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

Απάντηση:

- i) Εφαρμόζουμε για την κρούση την Α.Δ.Ο. και έχουμε:

$$\vec{P}_{\text{πριν}} = \vec{P}_{\text{μετά}}$$

$$mv_0 = (m + 3m) \cdot v_K \rightarrow$$

$$y^2 - 8y + \frac{39}{4} = 0 \rightarrow$$

$$y=6,5\text{m (απορ.) και } y=1,5\text{m}$$

iv) Αλλά τότε η κινητική ενέργεια του στερεού S μετά την κρούση είναι:

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 = \frac{1}{2} 4m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} 3m \ell^2 + 3m (OK)^2 + m y^2 \right) \cdot \omega^2$$

Οπότε το αντίστοιχο ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας:

$$\pi = \frac{| \Delta K |}{K_{\text{αρχ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{1}{2} 4m v_{\text{cm}}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} 3m \ell^2 + 3m (OK)^2 + m y^2 \right) \cdot \omega^2}{\frac{1}{2} m v_o^2} 100\%$$

$$\pi = \frac{v_o^2 - 4v_{\text{cm}}^2 - \left(\frac{1}{4} \ell^2 + 3(OK)^2 + y^2 \right) \cdot \omega^2}{v_o^2} 100\%$$

Και με αντικατάσταση $\pi=56,25\%$

v) Και στην παρούσα κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{P}_{\text{πριν}} = \vec{P}_{\text{μετά}}$$

$$m v_o = -m \cdot v_1 + M \cdot v_2 \rightarrow$$

$$v_2 = \frac{m(v_o + v_1)}{M} = \frac{m(8+1)}{3m} m/s = 3m/s.$$

Εξάλλου με βάση το προηγούμενο ερώτημα (MO)=d=2m. Αν τώρα η ράβδος μετά την κρούση εκτός της ταχύτητα $v_2=v_o=v_{\text{cm}}$ αποκτήσει και γω-

νιακή ταχύτητα ω , ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον

της O, η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς το O, θα μας δώσει (θεωρούμε θετική την ωρολογιακή φορά):

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \rightarrow$$

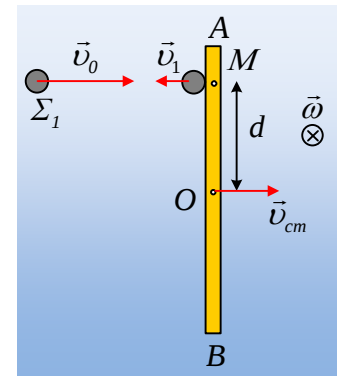
$$m \cdot v_o \cdot d = m \cdot v_1 \cdot d + I_{\text{cm}} \cdot \omega \rightarrow$$

$$m v_o \cdot d - m v_1 \cdot d + \frac{1}{12} 3m \cdot \ell^2 \cdot \omega \rightarrow$$

$$\omega = \frac{4(v_o + v_1) \cdot d}{\ell^2} = \frac{4(8+1) \cdot 2}{6^2} \text{rad/s} = 2 \text{rad/s}$$

Αλλά τότε για την κινητική ενέργεια θα έχουμε:

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m 8^2 = 32m \text{ (S.I.)}$$



$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 \rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 3m v_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} 3m \ell^2 \right) \cdot \omega^2$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m 1^2 + \frac{1}{2} 3m 3^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 3m \cdot 6^2 \cdot 2^2 = 0,5m + 13,5m + 18m = 32m \text{ (S.I.)}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας, οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι προφανώς 0%.

Σχόλια:

- 1) Από τη στιγμή που βρήκαμε ότι το κέντρο μάζας στο 2^ο πείραμα απέχει από το μέσον της ράβδου (ΚΟ)=0,5m θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη θέση του Μ, εστιάζοντας στις ιδιότητες του κ.μ. Επειδή όμως στην θεωρία του βιβλίου δεν υπάρχει κάτι σχετικό, προτιμήθηκε να δοθεί ένα επιπλέον δεδομένο (οι ταχύτητες των δύο άκρων και η ΑΔΣ να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της θέσης.
- 2) Στο 3^ο πείραμα η κρούση ονομάζεται ελαστική και η μελέτη της στηρίζεται στην Α.Δ.Ο., Α.Δ.Σ. και Α.Δ.Μ.Ε. η οποία τελικά εφαρμόζεται ως $K_{\text{πριν}} = K_{\text{μετά}}$, αφού δεν υπεισέρχονται καθόλου δυναμικές ενέργειες στο πρόβλημά μας.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης