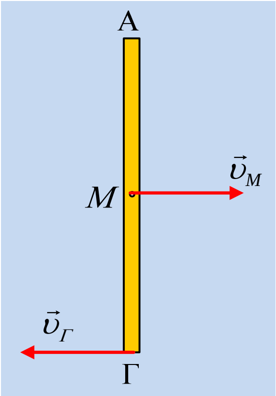
ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ

Ι) Ράβδος μήκους L βρίσκεται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Κάποια στιγμή που θεωρούμε t=0, γνωρίζουμε τις ταχύτητες του μέσου Μ και του άκρου Γ οι οποίες έχουν ίσα μέτρα $υ_Μ=υ_Γ=υ$ και κατευθύνσεις όπως στο σχήμα:



Α) Τι είδους κίνηση εκτελεί η ράβδος;

Β) Σχεδιάστε τη θέση της ράβδου μετά από χρονικό διάστημα $Δt=πL/8υ$

Γ) Ποια η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του άκρου Α στη θέση αυτή;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Το ελεύθερο στερεό εκτελεί είτε μεταφορική, (μετά από στιγμιαία ώθηση δύναμης στο μέσο Μ), είτε περιστροφική γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, (μετά από στιγμιαία ώθηση ροπής ζεύγους δυνάμεων) ,είτε σύνθετη κίνηση (μετά από στιγμιαία ώθηση δύναμης σε σημείο διαφορετικό του κέντρου μάζας).

Η κίνηση της ράβδου δεν είναι μεταφορική, αφού τα σημεία Μ,Γ έχουν διαφορετικές ταχύτητες. Δεν είναι επίσης περιστροφική, αφού το μέσο Μ έχει ταχύτητα, άρα δεν περνά από αυτό ο νοητός άξονας. Συνεπώς η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση.

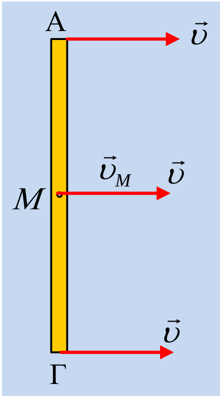
Β) Η σύνθετη κίνηση εξετάζεται ως επαλληλία μιας ομαλής μεταφορικής και μιας ομαλής περιστροφικής γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, δηλαδή το μέσο Μ της ράβδου*.

Όταν λοιπόν στη συνέχεια αναφερόμαστε είτε σε μεταφορική, είτε σε περιστροφική κίνηση, θα εννοούμε μία από τις κινήσεις που συνθέτουν την πραγματική κίνηση της ράβδου.

* Θεωρητικό υπόβαθρο της παραδοχής αυτής αποτελεί το θεώρημα Chasle, σύμφωνα με το οποίο: *«Η γενική κίνηση ενός στερεού μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μια μεταφορά και μια περιστροφή…»*

Η ταχύτητα της μεταφορικής είναι η ταχύτητα του μέσου Μ, δηλαδή η $\vec{υ}$.

Όλα τα σημεία της ράβδου έχουν ταχύτητα $\vec{υ}$, λόγω της μεταφορικής κίνησης που θεωρούμε ότι εκτελεί.



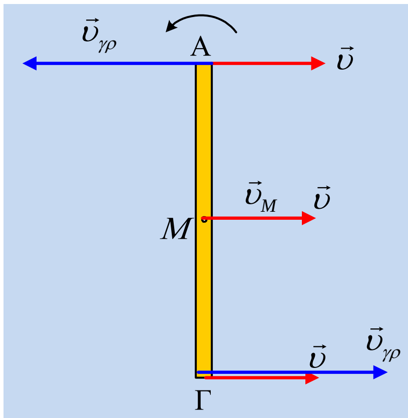
Εφόσον θεωρούμε ότι εκτελεί περιστροφική γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το μέσο της Μ, τα άκρα Α, Γ θα εκτελούν κυκλική κίνηση ακτίνας $(\text{MA}) = (\text{M}\Gamma) = \dfrac{L}{2}$, οπότε έχουν γραμμική ταχύτητα ίσου μέτρου $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega\dfrac{L}{2}$ και αντίθετης φοράς.

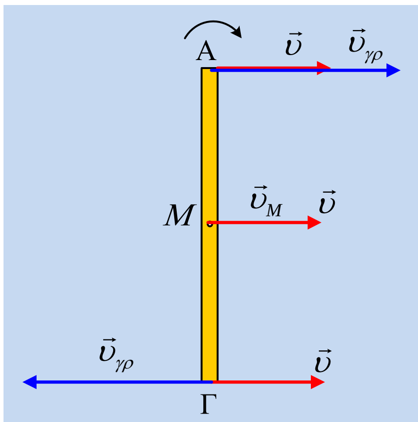
Για τις ταχύτητες των τριών σημείων ισχύει:

$\vec{\upsilon}_\text{A} = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$, $\vec{\upsilon}_\text{M} = \vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}_\Gamma = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$

Αν η ράβδος στρεφόταν αριστερόστροφα, τότε για το άκρο Γ οι $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ θα ήταν ομόρροπες, οπότε θα έπρεπε $\upsilon_\Gamma > \upsilon$, κάτι που δεν ισχύει.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η φορά περιστροφής είναι δεξιόστροφη.





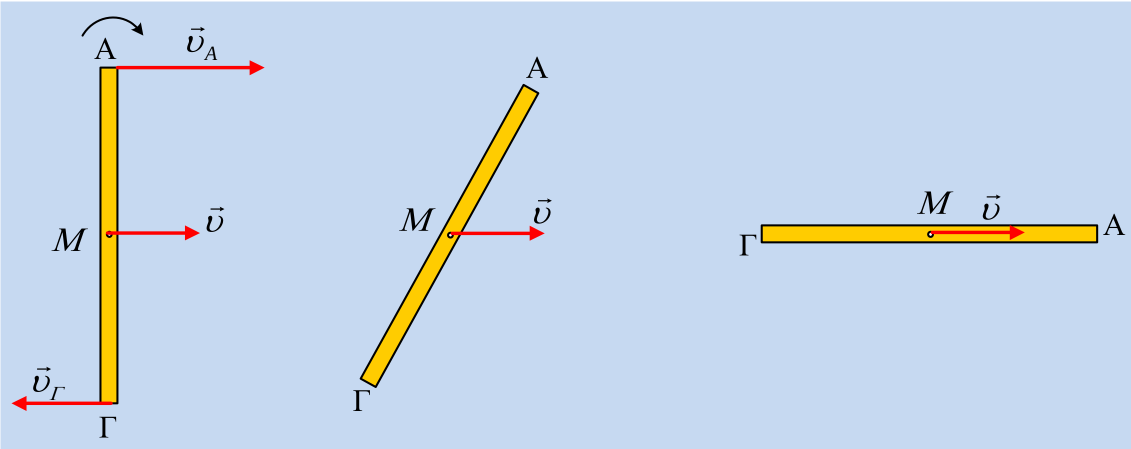
Άρα: $\vec{\upsilon}_\Gamma = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 2\upsilon \Rightarrow \omega\dfrac{L}{2} = 2\upsilon \Rightarrow \omega = \dfrac{4\upsilon}{L}$

Στο χρονικό διάστημα Δt=πL/8υ , το μέσο Μ έχει μετατοπιστεί κατά:

$$\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta x = \upsilon \cdot \frac{\pi L}{8\upsilon} \Rightarrow \Delta x = \frac{\pi L}{8}.$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, λόγω της περιστροφικής κίνησης, η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία:

$$\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4\upsilon}{L}\cdot\frac{\pi L}{8\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

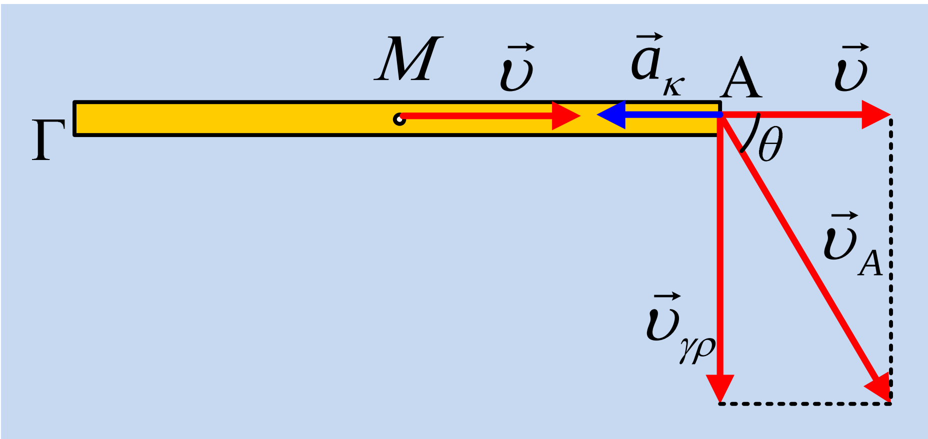


Η ταχύτητα του άκρου Α στη συγκεκριμένη θέση προκύπτει από τη σύνθεση δύο κάθετων συνιστωσών. Έχει μέτρο:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{5\upsilon^2} \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon\sqrt{5}$$

Η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση της $\vec{\upsilon}$ του μέσου Μ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\upsilon}{\upsilon} = 2$$

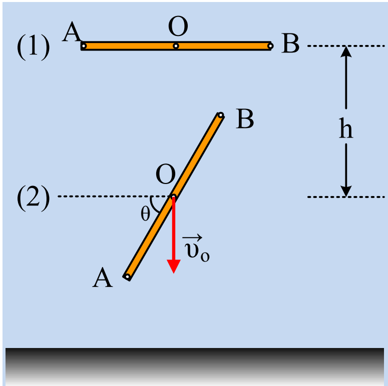


Η επιτάχυνση του άκρου Α είναι η συνισταμένη της επιτάχυνσης λόγω μεταφορικής κίνησης, της κεντρομόλου και της επιτρόχιας λόγω της κυκλικής.

Επειδή όμως η μεταφορική κίνηση είναι ομαλή: $\vec{\alpha}_{\mu\varepsilon\tau} = 0$. Επίσης και η κυκλική είναι ομαλή, οπότε: $\vec{\alpha}_{\varepsilon\pi} = 0$. Συνεπώς:

$$\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow \alpha_A = \alpha_\kappa = \omega^2\frac{L}{2} \Rightarrow \alpha_A = \frac{16\upsilon^2}{L^2}\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \alpha_A = \frac{8\upsilon^2}{L}$$

II) Η ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους L εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο σχήμα, η θέση (1) αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος. Στη θέση (2) το μέσο Ο έχει πέσει κατά h=L, ενώ η ράβδος σχηματίζει γωνία θ=π/3 με την οριζόντια διεύθυνση.



Α) Τι είδους κίνηση εκτελεί η ράβδος; Ποιες οι ταχύτητες των άκρων Α, Β και του μέσου Ο στη θέση (1);

Β) Να σχεδιάσετε τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις των άκρων Α, Β και του μέσου Ο τη στιγμή που η ράβδος είναι κατακόρυφη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη, η οποία εξετάζεται ως επαλληλία μιας ομαλά επιταχυνόμενης μεταφορικής με $\vec{a}_{cm}=\vec{g}$ και μιας αριστερόστροφης ομαλής περιστροφικής γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, δηλαδή το μέσο Ο της ράβδου*.

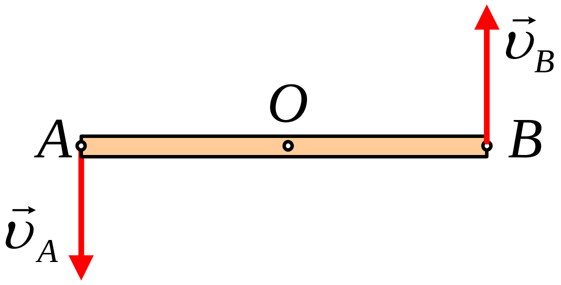
Όταν λοιπόν στη συνέχεια αναφερόμαστε είτε σε μεταφορική, είτε σε περιστροφική κίνηση, θα εννοούμε μία από τις κινήσεις που συνθέτουν την πραγματική κίνηση της ράβδου.

Στο χρονικό διάστημα που το μέσο Ο της ράβδου πέφτει λόγω της μεταφορικής κίνησης κατά h=L, η ράβδος στρέφεται λόγω της περιστροφικής κατά θ=π/3. Συνεπώς:

$$h=\frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow L=\frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t=\sqrt{\frac{2L}{g}} \quad \text{και} \quad \theta=\omega\cdot\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3}=\omega\cdot\sqrt{\frac{2L}{g}} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{g}{2L}}$$

Στη θέση μέγιστου ύψους (1):

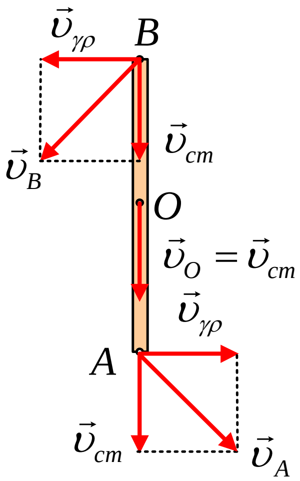
$$\upsilon_o=0\,,\ \text{αλλά} \quad \upsilon_A=\upsilon_B=\omega\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_A=\upsilon_B=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{g}{2L}}\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_A=\upsilon_B=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{gL}{2}}$$

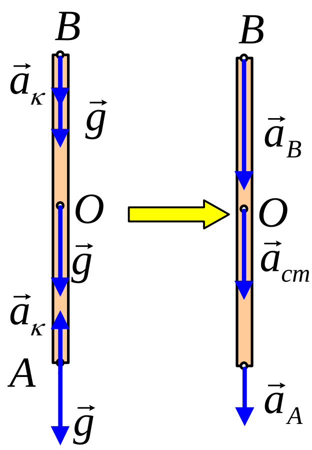


Β) Εφόσον η περιστροφική κίνηση της ράβδου είναι ομαλή (το βάρος δε δημιουργεί ροπή κατά τον άξονα περιστροφής) τα άκρα Α, Β έχουν μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, μέτρου:

$$a_k = \omega^2 \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{g}{2L} \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow a_k = \frac{\pi^2}{36} g \Rightarrow a_k = \frac{5}{18} g < g$$

Τη στιγμή λοιπόν που η ράβδος είναι κατακόρυφη έχουμε:





Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης