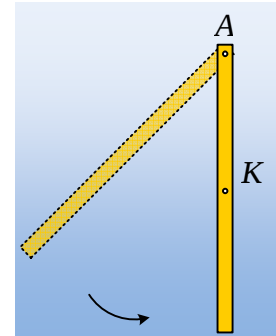


Η στροφορμή και μια κρούση.

Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $\ell = 2m$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το ένα άκρο της A , σε κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος αφήνεται από κάποια θέση και φτάνοντας στην κατακόρυφη θέση έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$.



- i) Δυο μαθητές συζητώντας για τη στροφορμή της ράβδου στη θέση αυτή, ως προς τον άξονα ο οποίος περνά από το άκρο A , υποστηρίζουν:

α) Ο A , η στροφορμή δίνεται από την εξίσωση $L_A = I_A \cdot \omega$.

β) Ο B , η στροφορμή της ράβδου δίνεται από την εξίσωση $L_A = I_{cm} \cdot \omega + m v_m \cdot R$,

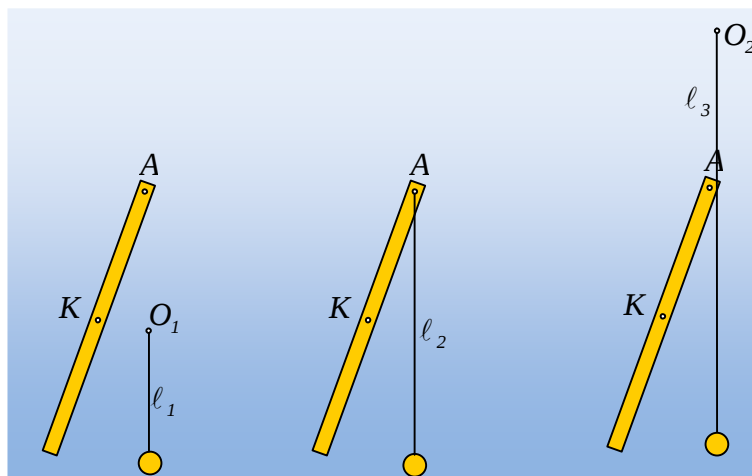
όπου $R = \frac{1}{2}\ell$ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας K της ράβδου.

Ποιος έχει δίκιο;

- ii) Στη θέση αυτή η ράβδος συγκρούεται με μια μικρή σφαίρα που θεωρείται υλικό σημείο μάζας $\frac{1}{2}m$, η οποία αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα v . Η σφαίρα κρέμεται από νήμα, σε τρεις διαφορετικές εκδοχές, που φαίνονται στο σχήμα, όπου για το μήκος του νήματος ισχύει:

$$\alpha) \ell_1 = \frac{1}{2}\ell \quad \beta) \ell_2 = \ell, \quad \gamma) \ell_3 = 1,5\ell.$$

Σε ποια περίπτωση η σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα;



- iii) Η σφαίρα αποκτά αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα $v = 3 \text{ m/s}$. Θέλουμε να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση και μας προτείνονται οι απόψεις τριών μαθητών A , B και Γ :

A) Να εφαρμόσουμε για την κρούση της αρχή διατήρηση της ορμής.

B) Να εφαρμόσουμε και για τα τρία σχήματα την $\Delta\Delta\Sigma$ ως προς όποιο σημείο θέλουμε.

Γ) Να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρηση της στροφορμής ($\Delta\Delta\Sigma$) ως προς το σημείο A .

Ποιος ή ποιοι μαθητές έχουν δίκιο;

- iv) Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = m\ell^2/12$.

Απάντηση:

- i) Ο Α έχει δίκιο. Πράγματι έχουμε μια περιστροφή της ράβδου ως προς σταθερό άξονα και από τον ορισμό της στροφορμής προκύπτει ότι η εξίσωση $L_A = I_A \cdot \omega$ είναι σωστή.

Ο Β μαθητής ξεκινά και αυτός από την παραπάνω σχέση και με τη βοήθεια του θεωρήματος του Steiner, γράφει:

$$L_A = I_A \omega = (I_{cm} + md^2) \omega = I_{cm} \omega + m \frac{\ell^2}{4} \omega = I_{cm} \omega + m \left(\frac{\ell}{2} \omega \right) \frac{\ell}{2} \rightarrow$$

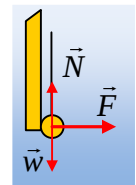
$$L_A = I_{cm} \omega + m v_{cm} \frac{\ell}{2}$$

Συνεπώς και ο Β μαθητής έχει δίκιο.

Πώς μεταφράζεται η παραπάνω εξίσωση; Τι λέει;

Η γενική κίνηση ενός στερεού δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μια μεταφορική του κέντρου μάζας και μια περιστροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας; Ωραία, ο πρώτος προσθετέος δίνει την στροφορμή εξαιτίας της περιστροφής και ο 2^{ος} τη στροφορμή εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης (η μάζα του στερεού θεωρείται συγκεντρωμένη στο σημείο Κ, το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $\frac{1}{2} \ell$).

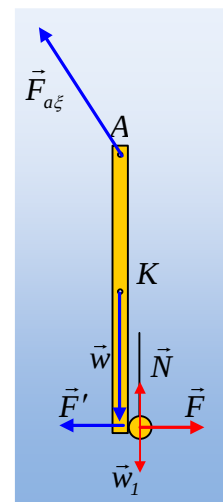
- ii) Η ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα θα καθοριστεί από τη δύναμη που θα δεχτεί από τη ράβδο και το χρόνο που διαρκεί η κρούση. Στο διπλανό σχήμα βλέπετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη διάρκεια της κρούσης. Το βάρος και η τάση του νήματος δεν επηρεάζουν την κίνηση στον άξονα x! Πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα δεν επηρεάζεται από το μήκος του νήματος που κρέμεται το σώμα. Έτσι και στις τρεις περιπτώσεις η σφαίρα αποκτά την ίδια ταχύτητα υ.



- iii) Α) πρόταση για να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ορμής είναι λανθασμένη. Το σύστημα των σωμάτων δεν είναι μονωμένο, αφού στη διάρκεια της κρούσης η ράβδος δέχεται άγνωστη δύναμη F_{ax} από τον άξονα, η οποία είναι εξωτερική.

- Β) Αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της στροφορμής ως προς κάποιο άλλο σημείο, έστω το O_2 που δένεται το νήμα στο 3^ο σχήμα, τότε η δύναμη από τον άξονα, εξωτερική δύναμη, έχει άγνωστη ροπή ως προς το O_2 , συνεπώς $\Sigma \tau_{O_2} \neq 0$ και η στροφορμή του συστήματος δεν διατηρείται. Άρα η πρόταση είναι λανθασμένη.

- γ) Αν βέβαια πάρουμε τη διατήρηση της στροφορμής ως προς το Α, τότε η δύναμη από τον άξονα (η πέτρα του σκανδάλου!!!) έχει μηδενική ροπή, οπότε $\Sigma \tau_A = 0$ και η στροφορμή του συστήματος ράβδος-σφαίρα παραμένει σταθερή. Σωστή πρόταση.



- iv) Σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα από το μήκος του νήματος, η σφαίρα αμέσως μετά την κρούση, έχει ως προς το άκρο Α της ράβδου στροφορμή $L_1 = m_1 v \cdot \ell$. Έτσι εφαρμόζοντας την ΑΔΣ, ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου στο άκρο Α, παίρνουμε:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \rightarrow$$

$$I_A \omega_1 = I_A \omega'_1 + m_1 v \cdot \ell$$

$$\text{Όπου } I_A = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2 \text{ και } m_1 = \frac{1}{2}m, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{1}{3}m\ell^2\omega_1 = \frac{1}{3}m\ell^2\omega'_1 + \frac{m}{2}v \cdot \ell \rightarrow$$

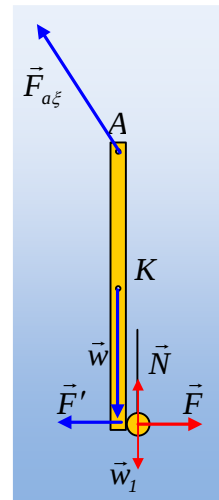
$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{3v}{2\ell} = 3\text{rad/s} - \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}\text{rad/s} = 0,75\text{rad/s}$$

Σχόλιο:

Στην περίπτωση που η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση, έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις όπως στο διπλανό σχήμα. Η αλήθεια είναι ότι αν ψάξουμε να βρούμε την δύναμη από τον άξονα F_{ax} , αυτή θα προκύψει κατακόρυφη!

Αλλά τότε η ροπή της εξωτερικής δύναμης είναι μηδέν και ως προς το σημείο O_1 και ως προς το σημείο O_2 . Αλλά αυτή είναι μια ειδική περίπτωση και μόνο σαν εξαίρεση μπορεί να ιδωθεί. Για να δούμε τη γενικότητα ας σκεφτούμε ότι η κρούση γίνεται σε μια άλλη θέση της ράβδου. Τότε η δύναμη δεν είναι κατακόρυφη, ούτε έχει τη διεύθυνση της ράβδου.

Καλό λοιπόν είναι αν θέλουμε να πάρουμε ΑΔΣ, σε κάθε αντίστοιχο πρόβλημα να δουλεύουμε με τον άξονα της ράβδου, ώστε να αποφύγουμε τυχόν λάθη.



Υλικά Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης