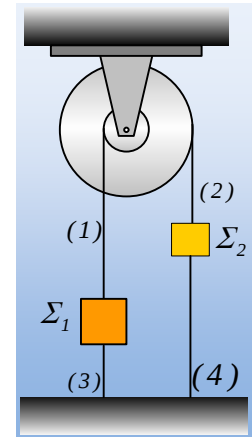


Δυο σώματα και μια διπλή τροχαλία.

Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 2\text{kg}$, ακτίνα $R = 0,3\text{m}$, είναι συμπαγής και ομογενής και φέρει ομόκεντρη κυκλική προεξοχή ακτίνας $r = 0,1\text{m}$. Στην περιφέρεια της τροχαλίας και στην κυκλική προεξοχή έχουμε τυλίξει δύο νήματα, (1) και (2), πολλές φορές ώστε να μην ολισθαίνουν και στα άκρα τους έχουμε δέσει δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 2\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$ αντίστοιχα. Τα σώματα οποία ισορροπούν δεμένα και με τα κατακόρυφα νήματα (3) και (4) με το έδαφος, όπως στο σχήμα.

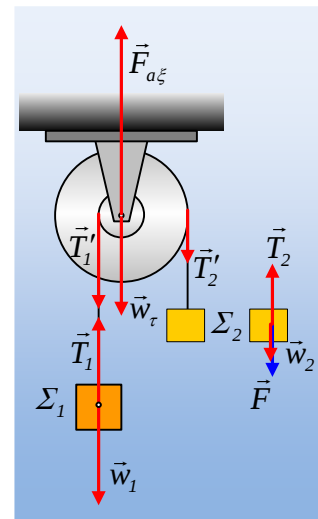


- i) Ποιο νήμα, το (3) ή το (4) μπορούμε να κόψουμε, χωρίς να πάνε να ισορροπεί το σύστημα; Να δικαιολογήστε την επιλογή σας.
- ii) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος που είναι απαραίτητο για την ισορροπία.
- ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το παραπάνω νήμα. Να υπολογισθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
- iii) Πόσο θα έχει αυξηθεί η δυναμική ενέργεια του Σ_1 τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του Σ_2 έχει μειωθεί κατά 3J;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2} MR^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Ας θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν τα νήματα (3) και (4) αλλά η εξασφάλιση της ισορροπίας επιτυγχάνεται με την άσκηση μιας κατακόρυφης δύναμης F . Σε ποιο σώμα; Σε όποιο θέλουμε, αλλά ας προτιμήσουμε σε αυτό που «υποψιαζόμαστε» ότι τείνει να κινηθεί προς πάνω. Ποιο είναι αυτό; Δεν ξέρουμε, αλλά το Σ_2 έχει μικρότερη μάζα, οπότε «λογικό» θα ήταν να υποθέσουμε ότι αυτό τείνει να κινηθεί προς τα πάνω. Τότε ασκώντας την κατακόρυφη δύναμη F στο Σ_2 πετυχαίνουμε την ισορροπία του συστήματος. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες στο σύστημα δυνάμεις.



Το Σ_1 ισορροπεί: $\Sigma F = 0 \rightarrow T_1 = W_1 = m_1 g = 20\text{N}$.

Η τροχαλία ισορροπεί: $\Sigma \tau = 0 \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot r = 0 \rightarrow T_2' = T_1' \frac{r}{R} = 20 \frac{0,1}{0,3} = 6,7\text{N}$

Το Σ_2 ισορροπεί: $\Sigma F = 0 \rightarrow F + W_2 - T_2 = 0 \rightarrow F = 6,7\text{N} - 10\text{N} = -3,3\text{N}$

Πράγμα που σημαίνει ότι αν θέλουμε να ισορροπεί το σύστημα, πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα Σ_2 δύναμη προς τα πάνω! Με άλλα λόγια το σώμα Σ_2 υποθέσαμε ότι τείνει να κινηθεί προς τα πάνω, ενώ στην πραγματικότητα, τείνει να κινηθεί προς τα κάτω. Έτσι το νήμα (4)

θα μπορούσε και να αφαιρεθεί, χωρίς να αλλάξει κάτι στην ισορροπία του συστήματος, αφού δεν ασκεί καμιά δύναμη (η τάση του είναι μηδενική), αφού ένα νήμα, το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να τραβά και όχι να σπρώχνει.

- ii) Έστω T_3 η τάση του (3) νήματος, μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η ισορροπία του συστήματος.

Το σώμα Σ_2 ισορροπεί: $\Sigma F=0 \rightarrow T_2=w_2=m_2g=10N$

Η τροχαλία ισορροπεί: $\Sigma \tau=0 \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot r = 0 \rightarrow$

$$T_1' = T_2' \frac{R}{r} = 10 \frac{0,3}{0,1} = 30N$$

Το Σ_1 ισορροπεί: $\Sigma F=0 \rightarrow T_3 + w_1 - T_1 = 0 \rightarrow$

$$T_3 = T_1 - m_1g = 30N - 20N = 10N.$$

- iii) Μόλις κόψουμε το νήμα (3), Το σώμα Σ_1 θα κινηθεί προς τα πάνω, το Σ_2 θα κατέβει, ενώ η τροχαλία θα περιστραφεί δεξιόστροφα. Από το δεύτερο νόμο για κάθε σώμα παίρνουμε:

Σώμα Σ_1 : $\Sigma F = m_1 a_1 \rightarrow T_1 - m_1g = m_1 \cdot a_1$ (1)

Σώμα Σ_2 : $\Sigma F = m_2 \cdot a_2 \rightarrow m_2g - T_2 = m_2 \cdot a_2$ (2)

Τροχαλία: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_2' \cdot R - T_1' \cdot r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Αλλά η επιτάχυνση του σημείου A, η επιτρόχια επιτάχυνσή του, είναι ίση με την επιτάχυνση a_1 του σώματος Σ_1 , όπως η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου B, είναι ίση με την επιτάχυνση a_2 , δηλαδή:

$$a_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r \quad (4) \quad \text{και} \quad a_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (5)$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (3) παίρνουμε:

$$(m_2g - m_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R) \cdot R - (m_1g + m_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r) \cdot r = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

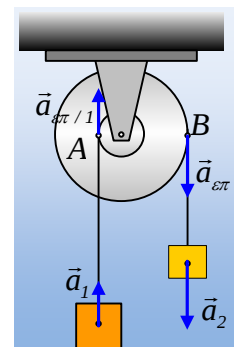
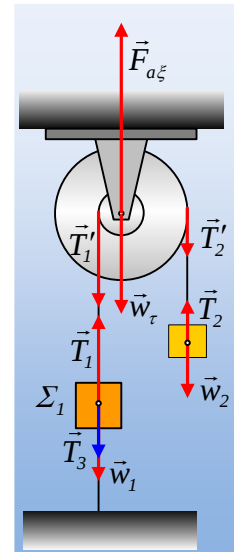
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{m_2gR - m_1gr}{\frac{1}{2}MR^2 + m_1r^2 + m_2R^2} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,3 - 2 \cdot 10 \cdot 0,1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,3^2 + 2 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot 0,3^2} \text{ rad} / \text{s}^2 = 5 \text{ rad} / \text{s}^2.$$

- iv) Στη θέση που η δυναμική ενέργεια του Σ_2 έχει μειωθεί κατά 3J, το σώμα έχει κινηθεί προς

$$\text{τα κάτω κατά } y_2, \text{ όπου } \Delta U = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = m_2gy_2 \rightarrow y_2 = \frac{\Delta U}{m_2g} = \frac{3}{10} \text{ m} = 0,3 \text{ m}.$$

Αλλά αν στον ίδιο χρόνο η τροχαλία έχει περιστραφεί κατά γωνία θ , θα αυξηθεί το μήκος του (2) νήματος κατά y_2 , ενώ θα μειωθεί το μήκος του (1) νήματος κατά y_1 και θα ισχύουν:



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \theta \cdot r \\ y_2 = \theta \cdot R \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{r}{R} \rightarrow y_1 = \frac{r}{R} y_2 = 0,1m$$

Αλλά αφού το σώμα Σ_1 ανέρχεται κατά $y_1 = 0,1m$, η δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά:

$$\Delta U_1 = m_1 g y_1 = 2 \cdot 10 \cdot 0,1 J = 2J.$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης