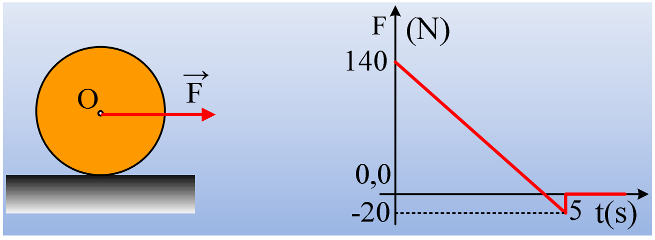
Γενικευμένοι νόμοι και ολίσθηση τροχού.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας M=10kg και ακτίνας =0,5m, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}4$. Σε μια στιγμή t=0 ασκείται στο κέντρο Ο του τροχού οριζόντια δύναμη F, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.



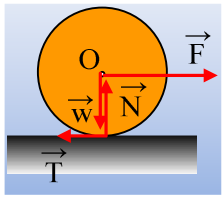
i) Να αποδειχθεί ότι ο τροχός θα αρχίσει να περιστρέφεται, αλλά και να ολισθαίνει.

ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που ο τροχός θα πάψει να ολισθαίνει και πλέον θα κυλίεται.

iii) Για την χρονική στιγμή t_1=1s να βρεθούν η ισχύς της δύναμης, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Το ερώτημα είναι τι κίνηση κάνει ο τροχός, ξεκινώντας την κίνησή του; Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \rightarrow F-T = M\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = \frac{1}{2} MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2} M\cdot\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2} Ma_{cm} \quad (4)$$

$$a_{cm} = \frac{2F}{3M}$$

Συνεπώς η αρχική τιμή του μέτρου της ασκούμενης τριβής είναι:

$$T_0 = \frac{F_0}{3} \approx 46{,}7N$$

Αλλά η μέγιστη τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, η οριακή στατική τριβή έχει μέτρο:

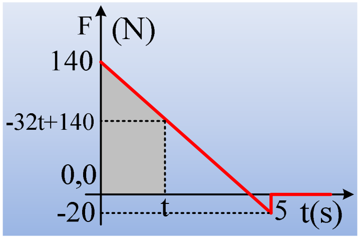
$$T_{o\rho} = T_{o\lambda} = \mu\cdot N = \mu\cdot Mg = 0{,}4\cdot 10\cdot 10N = 40N.$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ήταν λάθος και ο τροχός, στρέφεται μεν, αλλά και ολισθαίνει.

ii) Έστω ότι η ολίσθηση σταματά τη στιγμή t. Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού, έχουμε:

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \to \Delta p = F \cdot \Delta t - T \cdot \Delta t \to$$

$$p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t$$



Αλλά το άθροισμα ΣF·Δt είναι ίσο με το εμβαδόν του «γκριζαρισμένου» χωρίου στο διάγραμμα.

Μαθηματική παρένθεση:

(Η συνάρτηση της δύναμης, είναι της μορφής F=αt+β, όπου:

Για t=0, F=140N → β=140N και για t=5s, F=-20N → α=-32N/s

Οπότε F= -32t+140 (μονάδες στο S.I.)).

Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται: $p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t \to$

$$M\upsilon_{cm} = \frac{140 - 32t + 140}{2} t - 40t \to$$

$$10\upsilon_{cm} = 140t - 16t^2 - 40t \to$$

$$10\upsilon_{cm} = 100t - 16t^2 \quad (5)$$

Εξάλλου από τον αντίστοιχο γενικευμένο νόμο, για την στροφική κίνηση παίρνουμε, για το ίδιο χρονικό διάστημα:

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \to \Delta L = \sum \tau \cdot \Delta t \to$$

$$L\text{-}0 = T\cdot R\cdot t \to \tfrac{1}{2} MR^2\cdot\omega = T\cdot R\cdot t \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2} M(R\omega) = T\cdot t \quad (\alpha)$$

Όμως αφού τη στιγμή t ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, $\upsilon_{cm}=\omega R$ και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$M\,\upsilon_{cm} = 80t \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm} = 8\cdot t \quad (6)$$

Από (5) και (6) παίρνουμε:

$$80t = 100t - 16t^2 \to 16t^2 = 20t \to \ t=0 \text{ ή } t=1{,}25s$$

Προφανώς η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η δεύτερη λύση, αφού η τιμή t=0, αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει μέτρο $\upsilon_{cm}=8\cdot t=10m/s$.

iii) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη F μεταφέρει ενέργεια στον τροχό (η ισχύς της δύναμης) είναι:

$$\frac{dW}{dt} = F \cdot \upsilon_{cm} \to$$

Αλλά από την σχέση (5) για t=1s παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm} = 10t - 1{,}6t^2 = (10 - 1{,}6)m/s = 8{,}4m/s$$

Ενώ F= -32t+140 =108N, συνεπώς:

$$P_F = \frac{dW}{dt} = F \cdot \upsilon_{cm} = 108 \cdot 8{,}4W = 907{,}2W$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} \rightarrow$$

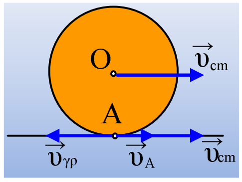
$$\frac{dK}{dt} = \sum F \cdot \upsilon_{cm} + \sum \tau \cdot \omega = (F - T) \cdot \upsilon_{cm} + TR \cdot \omega$$

Αλλά από την εξίσωση (α): ½ $M(R\omega)=T\cdot t \;\rightarrow R\omega=8m/s$, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = (F - T) \cdot \upsilon_{cm} + TR \cdot \omega = (108 - 40) \cdot 8{,}4J/s + 40 \cdot 8J/s = 891{,}2J/s$$

Εξάλλου ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, είναι κατά απόλυτο τιμή ίση με την ισχύ της τριβής ολίσθησης:

$$\frac{dQ}{dt} = \left| \frac{dW_T}{dt} \right| = T \cdot \upsilon_A$$



Ας εστιάσουμε στην ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο Α. Το σημείο Α έχει μια συνιστώσα ταχύτητας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, την υ_{cm} και μια συνιστώσα $\upsilon_{\gamma\rho}$, λόγω της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Αλλά τότε $\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}= \upsilon_{cm}-\omega R=8{,}4m/s-8m/s=0{,}4m/s$, οπότε:

$$\frac{dQ}{dt} = T \cdot \upsilon_A = 40 \cdot 0{,}4J/s = 16J/s$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε βέβαια, ότι η ενέργεια διατηρείται, αφού στον τροχό μεταφέρεται μέσω του έργου της δύναμης, ενέργεια με ρυθμό 907,2J/s, από τα οποία 891,2J/s αυξάνουν την κινητική ενέργεια του τροχού, ενώ τα υπόλοιπα 16J/s μετατρέπονται σε θερμική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης