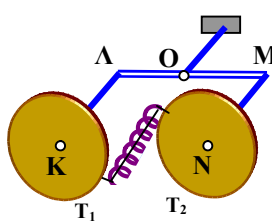


Αρχή διατήρησης ενέργειας και στροφορμής – 2ο Θέμα



Ορθογώνιο πλαίσιο KLMN σχήματος «Π» πλευράς $LM = d = 3r$ και αμελητέας μάζας, μπορεί να στέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που τέμνει κάθετα το μέσον O της πλευράς LM.

Δυο πανομοιότυποι τροχοί T_1 και T_2 μάζας m ο καθένας κι ακτίνας r , μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές, ως προς κάθετους άξονες τις οριζόντιες πλευρές ΛΚ

και ΜΝ του πλαισίου, έχοντας το επίπεδό τους κατακόρυφο και τα κέντρα τους στα σημεία Κ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ανάμεσα σε δυο καρφιά αμελητέας μάζας που είναι καρφωμένα στην περιφέρεια των τροχών στη διεύθυνση της ακτίνας, και εξέχουν κατά το ίδιο μήκος, συγκρατείται με τη βοήθεια νήματος συσπειρωμένο κατά $x = r$, ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 11 \text{ mN}^2$ με $\lambda > 0$. Αρχικά, το σύστημα κρατείται σε ηρεμία και το πλαίσιο είναι οριζόντιο.

Κάποια χρονική στιγμή, κόβουμε το νήμα και ταυτόχρονα αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.

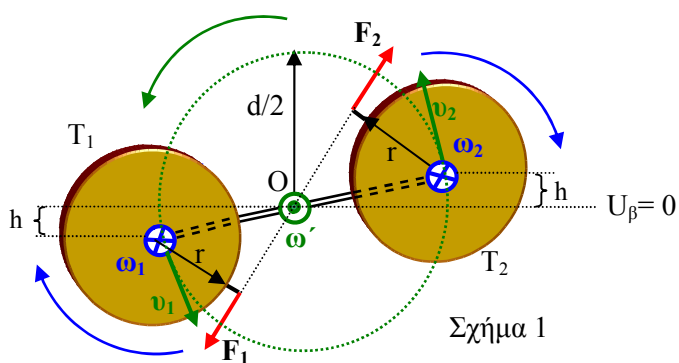
Όταν το ελατήριο θα αποκτή το φυσικό του μήκος, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κάθε τροχού γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του θα είναι

$$\alpha. \omega = \lambda, \quad \beta. \omega = 3\lambda, \quad \gamma. \omega = 5\lambda/2$$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς το κέντρο μάζας του είναι $I = (\frac{1}{2})mr^2$.

Απάντηση



Εξαιτίας των ροπών που ασκούν οι δυνάμεις F_1 και F_2 του ελατηρίου, οι δυο τροχοί θ' αρχίσουν να στρέφονται ως προς τους άξονες που είναι κάθετοι στα κέντρα τους δηλαδή να ιδιοστρέφονται, και μάλιστα κατά την ίδια φορά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Έτσι οι στροφορμές τους, $\vec{L}_1, \vec{L}_2$ θα έχουν

διεύθυνση που είναι κάθετη στη σελίδα και φορά προς τα μέσα δηλαδή $\vec{L}_1 \otimes, \vec{L}_2 \otimes$, οπότε $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \neq \vec{0}$.

Όμως επειδή οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το O είναι μηδέν ή αλληλοεξουδετερώνονται (ροπές των βαρών) η συνολική στροφορμή του συστήματος πρέπει να διατηρείται σταθερή και ίση με την αρχική της τιμή, δηλαδή ίση με μηδέν $\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} = \vec{0}$.

Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρο το σύστημα, θ' αρχίσει να στρέφεται ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το O με αντίθετη φορά από τη φορά ιδιοπεριστροφής των τροχών, όπως φαίνεται στο σχήμα 1, ώστε να προκύψει στροφορμή αντίθετη του αθροίσματος $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$.

Εξ άλλου, επειδή οι στιγμιαίες τιμές των δυνάμεων που ασκεί το ελατήριο έχουν ίσα μέτρα, και οι στιγμιαίες τιμές των ροπών που ασκούν στους τροχούς θα είναι ίσες αφού τα άκρα του ελατηρίου απέχουν ίσες αποστάσεις από τα κέντρα K, N.

Επομένως, τη χρονική στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος και παύουν να ασκούνται οι δυνάμεις του, οι στροφορμές των τροχών θα είναι

$$L_1 = L_2 = \sum F \cdot R \cdot dt \quad \text{ή}$$

$$L_1 = I\omega_1 \quad \text{και} \quad L_2 = I\omega_2 \quad \text{άρα} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (1)$$

Οι τροχιακές ταχύτητες εξ άλλου $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ θα έχουν μέτρα $v_1 = v_2 = v = \omega' \cdot \frac{d}{2}$ (2) όπου ω' το μέτρο της

γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του συστήματος ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O οι δε

τροχιακές στροφορμές θα είναι $L_{1\tau p} = L_{2\tau p} = mv \frac{d}{2}$ (3).

Με βάση λοιπόν την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_{1\tau p} + \vec{L}_{2\tau p} = \vec{0}.$$

Ορίζοντας θετική τη φορά της ιδιοπεριστροφής και με βάση τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$$2 \cdot \frac{1}{2} mr^2 \omega - 2mv \frac{d}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad mr^2 \omega - m \cdot \omega' \cdot \frac{d}{2} \cdot d = 0 \quad \text{άρα} \quad \omega' = 2 \frac{r^2}{d^2} \omega \quad (4)$$

και από (2), (4)

$$v = \frac{d}{2} \cdot \omega' = \frac{d}{2} \cdot 2 \frac{r^2}{d^2} \omega = \frac{r^2}{(3r)} \cdot \omega = \frac{r}{3} \omega \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας και με τη βοήθεια του σχήματος 1 έχουμε

$$\frac{1}{2} k \cdot x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 - mgh + mgh \quad (6)$$

Θέτουμε όπου $x = r$, $v = \frac{r}{3} \cdot \omega$ και μετά τις πράξεις προκύπτει ότι $\omega = 3\lambda$.

Άρα σωστή είναι η β.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Μανώλης Δρακάκης