

Μια εισαγωγή στην εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Το κύμα φτάνει τη στιγμή $t_0=0$ στην αρχή $x=0$ του άξονα, ενώ τη στιγμή $t_1=2s$ σε σημείο B στη θέση $x_B=3m$. Το σημείο B τη στιγμή που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει σε ακραία θέση ταλάντωσης με απομάκρυνση $0,5m$, μετά από χρόνο $0,25s$.

- i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- ii) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα x τη χρονική στιγμή $t_2=3,5s$.
- iii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:
 - α) της απομάκρυνσης και β) της ταχύτητας του σημείου B.
- iv) Αν στο σημείο B βρίσκεται ένα υλικό σημείο μάζας $1mg$, να βρείτε τη δύναμη που δέχεται από τα διπλανά του υλικά σημεία, τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_3=1,5s$ και β) $t_4=2,125s$.

Απάντηση:

- i) Αφού το κύμα για να διαδοθεί από το O στο B χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t=t_1-t_0=2s$, η ταχύτητα διάδοσής του είναι:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_B}{t_2} = \frac{3m}{2s} = 1,5m/s$$

Αλλά για να μεταβεί ένα υλικό σημείο που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας σε μέγιστη απομάκρυνση, χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης. Οπότε $T=4\Delta t=1s$.

Αλλά τότε από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = vT = 1,5m$$

Όλα τα δεδομένα μας, μας παραπέμπουν στην εξίσωση του κύματος που μας δίνει η θεωρία μας:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow$$

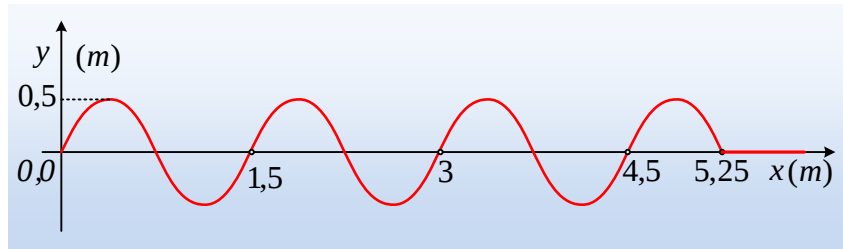
$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{1,5} \right) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 1,5t \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

- ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος $t=3,5s$ παίρνουμε:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{1,5} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(3,5 - \frac{x}{1,5} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu \left(7\pi - \frac{4\pi}{3}x \right) \rightarrow$$

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$$

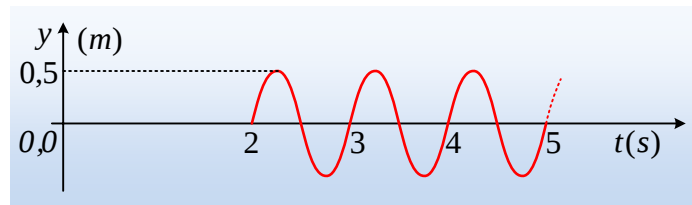
Με $x \leq 1,5t$ ή $x \leq 5,25m$, οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει τη μορφή:



iii) α) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος $x=x_B=3m$ παίρνουμε:

$$y_B = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{1,5} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{3}{1,5} \right) = 0,5 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi) \text{ (S.I.) με } t \geq 2s.$$

Με γραφική παράσταση:



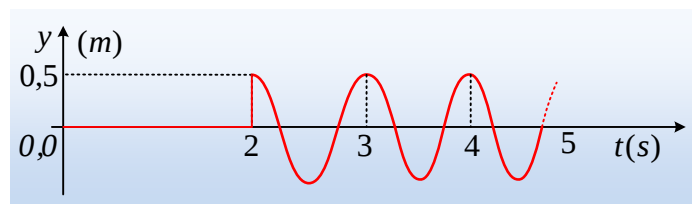
β) Αφού το υλικό σημείο που βρίσκεται στο σημείο B εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_B = 0,5 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi)$$

Η ταχύτητά ταλάντωσής του θα είναι της μορφής:

$$v_B = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 4\pi) = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 4\pi) \text{ (μονάδες S.I.) με } t \geq 2s.$$

Και γραφική παράσταση:



iv) Το κύμα φτάνει στο σημείο B τη χρονική στιγμή $t_1=2s$, συνεπώς πριν ηρεμεί, οπότε:

α) Τη στιγμή $t_3=1,5s$ $\Sigma F=0$.

β) Μετά τη στιγμή $t=2s$ το υλικό σημείο ταλαντώνεται και προηγούμενα βρήκαμε την εξίσωση της απομάκρυνσης $y_B = 0,5 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi)$.

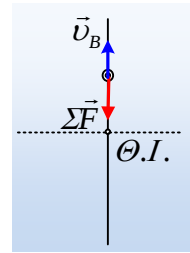
Αλλά τότε η επιτάχυνση του υλικού σημείου δίνεται από την εξίσωση:

$$a_B = -A \cdot \omega^2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi) = -0,5 \cdot (2\pi)^2 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi) \approx -20 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi) \text{ (S.I.)}$$

Συνεπώς η συνισταμένη δύναμη, που προκαλεί την παραπάνω επιτάχυνση, θα είναι:

$$\Delta F_B = ma = -20 \cdot m \cdot \eta\mu(2\pi - 4\pi) = -20 \cdot 10^{-6} \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 2,125 - 4\pi) \rightarrow$$

$$\Delta F_B = -2 \cdot 10^{-5} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$



Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται η θέση του υλικού σημείου και η δύναμη που δέχεται.

Σχόλιο:

Στο iii) ερώτημα βρήκαμε ότι στο σημείο B που φτάνει το κύμα, το υλικό σημείο ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του, με μέγιστη ταχύτητα! Έχουμε δηλαδή ένα υλικό σημείο που «ακαριαία» αποκτά κάποια ταχύτητα, χωρίς να χρειαστεί κάποιο χρονικό διάστημα για να επιταχυνθεί.

Προφανώς κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με τους νόμους της φυσικής, πράγμα που σημαίνει ότι εδώ κάναμε απλά μια «μαθηματική επεξεργασία» ενώ η κατάσταση είναι ελαφρώς δυσκολότερη και η ημιτονοειδής μορφή που χαράξαμε αποδίδει στο «περίπου» την πραγματικότητα.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης