Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με…. «κρυμμένη» αρχική φάση

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους ***0,2m*** διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x'Ox, προς τη θετική φορά του άξονα, με ταχύτητα μέτρου ***2m/s***. Το κύμα εξαναγκάζει κάθε υλικό σημείο του μέσου στο οποίο φθάνει, να κινηθεί από τη θέση ισορροπίας του προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση, όπου φθάνει σ' αυτή μετά από χρόνο ***0,05s***. Ένα υλικό σημείο Λ($x_Λ=+0,7m$) έχει τη χρονική στιγμή t=$\frac{5}{12}s$ απομάκρυνση $y_Λ=-0,1m$ και $u_Λ<0$ για ***1η φορά*** από τη στιγμή που το κύμα έφτασε σε αυτό και το έθεσε σε ταλάντωση.

Να υπολογιστούν:

α) η οριζόντια απόσταση μεταξύ ενός όρους και της μεθεπόμενης κοιλάδας του κύματος.

β) για πόσο χρόνο ταλαντώνεται το σημείο Λ από τη στιγμή που το κύμα έφτασε σε αυτό.

γ) η χρονική στιγμή t_1 που το σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται και η απόσταση που έχει διατρέξει το κύμα στο χρονικό διάστημα $0 \to t_1$.

δ) η εξίσωση του αρμονικού κύματος

ε) Να γίνει το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές $t_o=0$ και $t=\frac{5}{12}s$

στ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα βαθμολογημένων αξόνων τη γραφική παράσταση της φάσης ταλάντωσης των υλικών σημείων O(x=0) και Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση:

α) Το χρονικό διάστημα μετάβασης από την θέση ισορροπίας(y=0) στην πάνω ακραία θέση ταλάντωσης (y=+A) είναι T/4, οπότε:

$$\frac{T}{4} = 0{,}05 \Rightarrow T = 0{,}2s$$

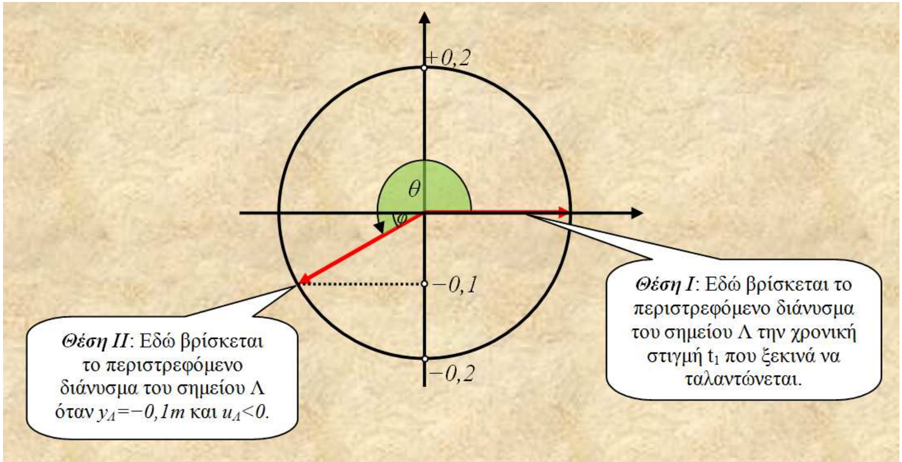
Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής:

$$u = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{u}{f} = u \cdot T = 0{,}4m$$

Η οριζόντια απόσταση όρους από την επόμενη κοιλάδα είναι $\frac{\lambda}{2}$, ενώ η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλάδων αντιστοιχεί σε 1 μήκος κύματος λ. Οπότε η απόσταση ενός όρους από την μεθεπόμενη κοιλάδα είναι:

$$d = \frac{\lambda}{2} + \lambda = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d = 0,6m}}$$

β) Θα εργαστούμε με περιστρεφόμενο διάνυσμα. Το σημείο Λ ξεκινά να ταλαντώνεται μία χρονική στιγμή t_1.



Το υλικό σημείο Λ την χρονική t_1 που το κύμα φθάνει σε αυτό ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με φορά προς τα πάνω, οπότε το περιστρεφόμενο διάνυσμά του ταυτίζεται με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα (θέση I). Όταν το Λ αρχίζει να ταλαντώνεται, το περιστρεφόμενο διάνυσμά του αρχίζει να περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα ίση **αριθμητικά** με την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης και μετά από χρόνο Δt φθάνει στη θέση II, όπου η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα αντιστοιχεί σε $y_Λ=-0{,}1m$ και $u_Λ<0$, έχοντας διαγράψει επίκεντρη γωνία θ=π+φ.

Είναι: $ημφ = \frac{|-0{,}1|}{0{,}2} = \frac{1}{2} \Rightarrow φ = \frac{π}{6} rad$

Οπότε: $θ=π + \frac{π}{6} = \frac{7π}{6} rad.$

Έτσι:

$$Δt = \frac{θ}{ω} = \frac{θ}{\frac{2π}{T}} = \frac{7π/6}{10π} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Δt = \frac{7}{60} s}}$$

γ) Είναι:

$$Δt=t-t_1$$

όπου t_1 που το κύμα φθάνει στο σημείο Λ, δηλαδή η στιγμή που το υλικό σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται.

Έτσι:

$$t_1=t-Δt=\frac{5}{12} - \frac{7}{60} = \frac{25}{60} - \frac{7}{60} = \frac{18}{60} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t_1 = 0{,}3s}}$$

Η απόσταση που έχει διατρέξει το κύμα από την χρονική στιγμή $t_o=0$ έως t_1 είναι:

$$Δx=u \cdot Δt \Rightarrow Δx = u \cdot (t_1 - 0) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Δx = 0{,}6m}}$$

Παρατηρούμε ότι $Δx<x_Λ=+0{,}7m$, που σημαίνει ότι το κύμα την χρονική στιγμή $t_o=0$ έχει φτάσει πέρα από το σημείο Ο(x=0).

δ) Το κύμα την χρονική στιγμή t_o=0 έχει φτάσει στο σημείο K με:

$$\Delta x = x_\Lambda - x_K \Rightarrow x_K = +0{,}1m (= +\lambda/4)$$

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου K που ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t=0 με φορά προς τα πάνω(u>0) θα είναι:

$$y_K = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow y_K = 0{,}2\eta\mu(10\pi t)$$

Ένα σημείο Σ του ελαστικού μέσου στην θέση x του θετικού ημιάξονα δεξιά από το σημείο K ξεκινά να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\Delta x}{u_\delta} = \frac{x - x_K}{u_\delta} = \frac{x - 0{,}1}{2}$$

Επομένως μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t - t_1 = t - \frac{x-0{,}1}{2}$ και η εξίσωση απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y(x,t) = A\eta\mu[\omega(t - t_1)] \Rightarrow y(x,t) = 0{,}2\eta\mu\left[10\pi\left(t - \frac{x-0{,}1}{2}\right)\right]$$

$$y(x,t) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(10\pi t - 5\pi x + 0{,}5\pi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{y(x,t) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

ε) Την χρονική στιγμή to=0, το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι το σημείο K με x_K=+0,1m(=+λ/4).

ενώ το σημείο O(x=0) βρίσκεται σε θέση απομάκρυνσης

$$y_O = 0{,}2\eta\mu\frac{\pi}{2} = +0{,}2m$$

Την χρονική στιγμή $t = \frac{5}{12}s$, το κύμα έχει διαδοθεί κατά:

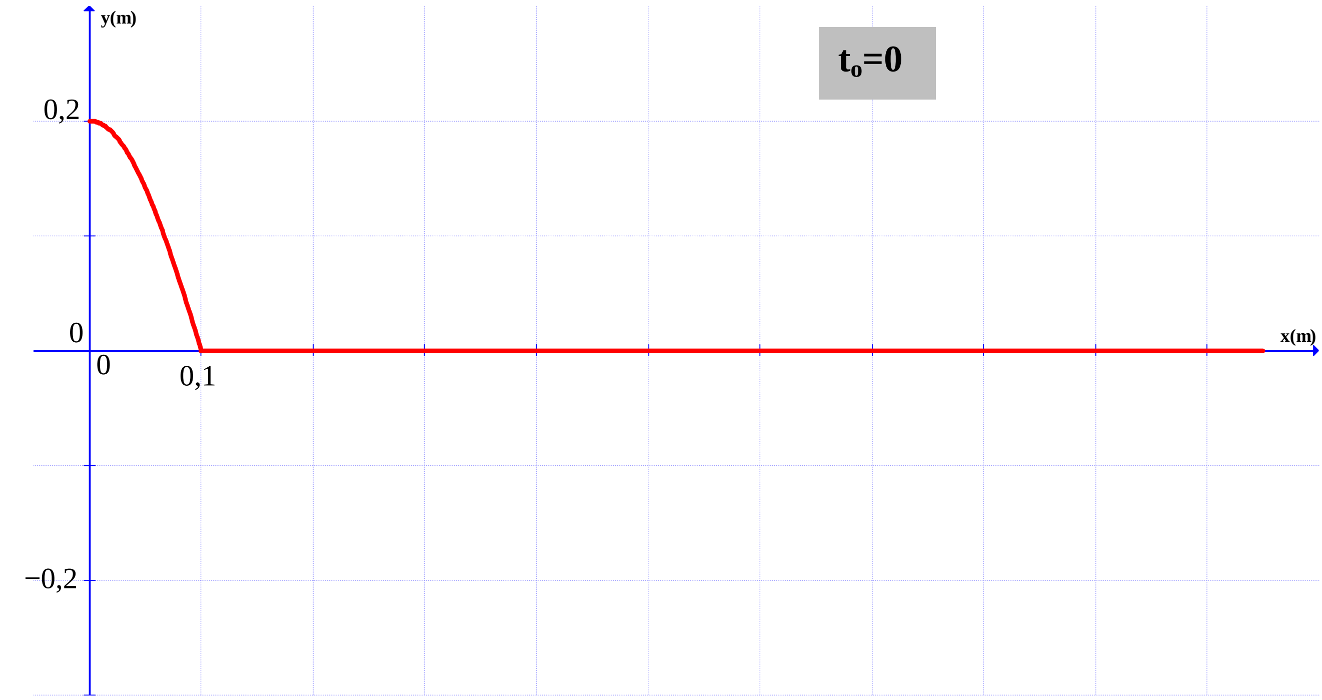
$$\Delta x = u \cdot \Delta t = 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{6}m$$

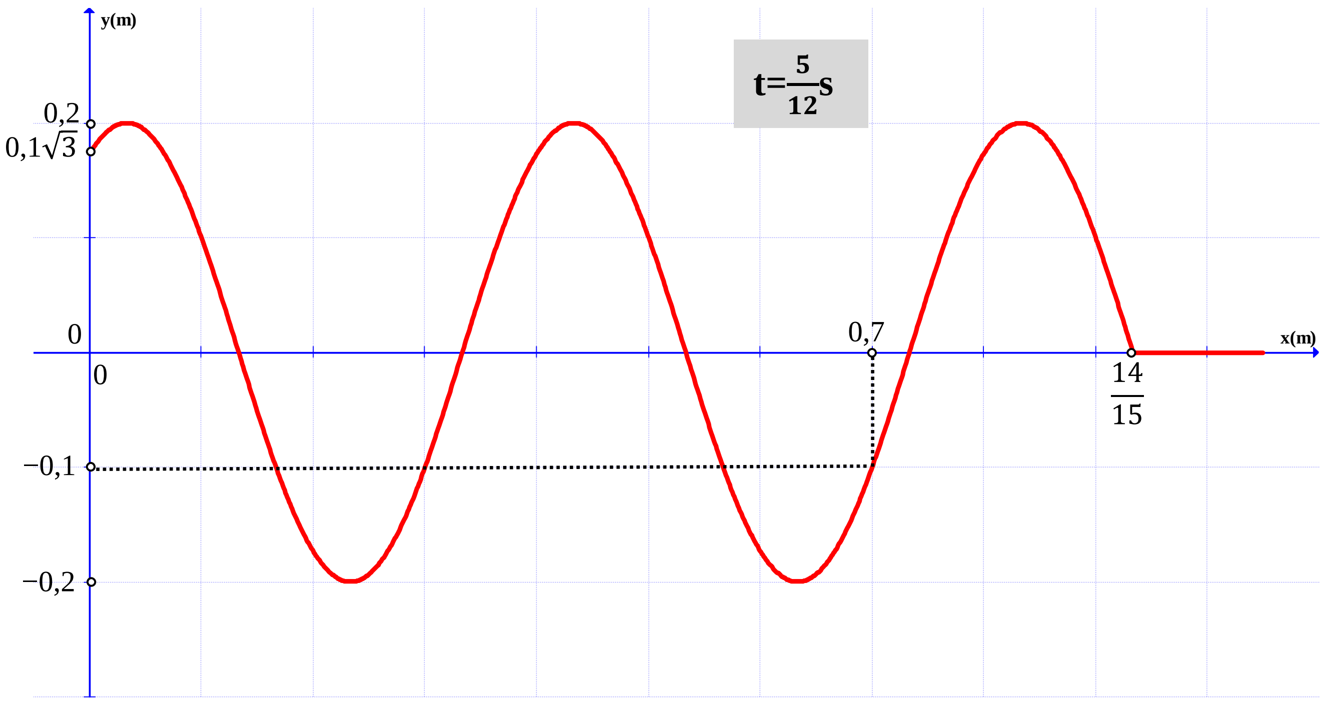
δηλαδή έχει φτάσει μέχρι το σημείο με συντεταγμένη

$$x = 0{,}1 + \frac{5}{6} = \frac{1}{10} + \frac{5}{6} = \frac{3}{30} + \frac{25}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}m(= 2\lambda + \frac{\lambda}{3})$$

Το σημείο O(x=0) την ίδια χρονική στιγμή βρίσκεται σε θέση απομάκρυνσης

$$y_O = 0{,}2\eta\mu\left(10\pi \cdot \frac{5}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{50\pi}{12}\right) = 0{,}2\sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = +0{,}1\sqrt{3}m$$





στ) Η φάση του κύματος είναι:

$$\varphi(x,t) = 10\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}$$

Η φάση ταλάντωσης του σημείου O(x=0) σε συνάρτηση με το χρόνο προκύπτει από την εξίσωση της φάσης του κύματος θέτοντας x=0:

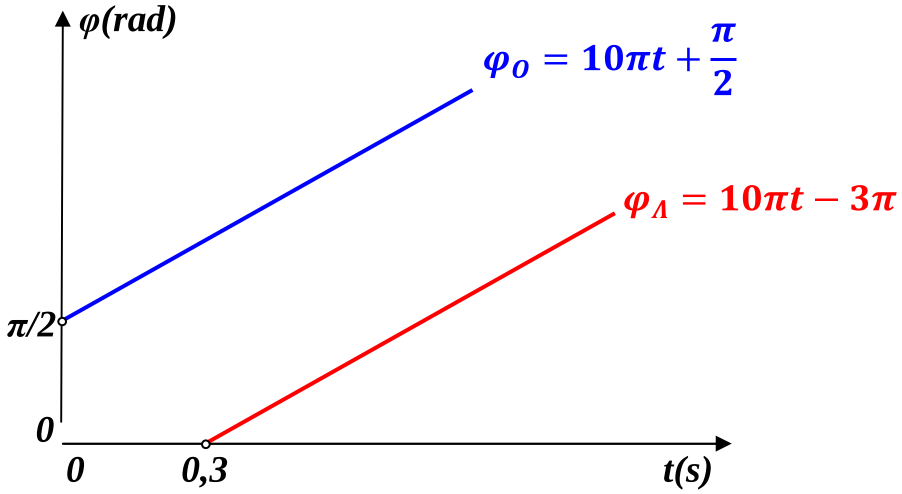
$$\varphi_O = 10\pi t + \frac{\pi}{2} \ \ \gamma\iota\alpha \ t \geq 0$$

Το σημείο Ο έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται πριν από την χρονική στιγμή t=0, οπότε η παραπάνω έχει νόημα για $t \geq 0$

Η φάση ταλάντωσης του σημείου Λ(x=0,7m) σε συνάρτηση με το χρόνο προκύπτει από την εξίσωση της φάσης του κύματος θέτοντας x=0,7m:

$$\varphi_{\Lambda} = 10\pi t - 3{,}5\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_{\Lambda} = 10\pi t - 3\pi \ \ \gamma\iota\alpha\ t \geq 0{,}3s$$

Το σημείο Λ ξεκινάει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t_1=0,3s, οπότε η παραπάνω έχει νόημα για $t \geq$ 0,3s.



Επιμέλεια:

Πέτρος Καραπέτρος