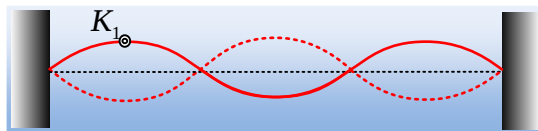


Ένα στάσιμο κύμα, δύο εξισώσεις στάσιμου.

Μια χορδή μήκους 3m έχει στερεωμένα τα δυο άκρα της. Η χορδή τίθεται σε ταλάντωση και πάνω της δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, με μορφή όπως στο παρακάτω σχήμα, όπου το πλάτος ταλάντωσης της πρώτης κοιλίας K_1 είναι 0,2m και η συχνότητά της 20Hz.



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της παραπάνω χορδής.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος, δεχόμενοι ότι η αρχή του άξονα, είναι η θέση ισορροπίας της κοιλίας K_1 , ενώ τη στιγμή $t=0$ το σημείο K_1 περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση).
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου, δεχόμενοι ως αρχή του άξονα x , το αριστερό άκρο της χορδής και την ίδια, όπως παραπάνω, στιγμή $t=0$.
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός σημείου Σ το οποίο απέχει 1,25 m από το αριστερό άκρο της χορδής. Η απάντηση να δοθεί με την βοήθεια και των δύο παραπάνω εξισώσεων στάσιμου που βρήκατε.

Απάντηση:

- i) Με βάση το σχήμα που δίνεται $\ell = 3 \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \ell = 2m$ όπου λ το μήκος ενός τρέχοντος κύματος κατά μήκος της χορδής. Αλλά τότε η ταχύτητα του παραπάνω τρέχοντος κύματος είναι:

$$v = \lambda f = 2 \cdot 20m/s = 40m/s.$$

- ii) Αν στη θέση $x=0$ υπάρχει κοιλία η οποία τη στιγμή $t=0$ περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη με θετική ταχύτητα, τότε ισχύει η γνωστή μας εξίσωση του στάσιμου, που έχει το βιβλίο μας:

$$y_1 = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \rightarrow$$

$$y_1 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(40\pi t) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } -0,5m \leq x \leq 2,5m, \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- iii) Προφανώς τώρα η ζητούμενη εξίσωση δεν είναι αυτή του βιβλίου αλλά θα είναι της μορφής:

$$y_2 = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \vartheta \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} + \phi \right)$$

Έτσι εφαρμόζοντάς την, για τη θέση της πρώτης κοιλίας, $x=0,5m$ τη στιγμή $t=0$ παίρνουμε:

$$y_2 = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(0,5\pi + \vartheta) \cdot \eta\mu(40\pi \cdot 0 + \phi)$$

$$\text{Όμως είτε } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ είτε } \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \neq 0$$

Άρα $\eta\mu\varphi=0$, οπότε $\varphi=0$ ή $\varphi=\pi$.

Επειδή την $t = 0$ η κοιλία κινείται κατά τη θετική φορά ισχύει:

$$v > 0 \Rightarrow 20\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi > 0 \rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) > 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi > 0 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ και } \varphi=0 \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) < 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\varphi < 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ και } \varphi=\pi \text{ ή}$$

Οπότε καταλήγουμε σε δύο ισοδύναμες εξισώσεις:

$$y = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\pi x + \frac{3\pi}{2}\right)\eta\mu(40\pi t)(SI)$$

ή

$$y = 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu(40\pi t + \pi)(SI)$$

Οι οποίες οδηγούν στην

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \eta\mu(40\pi t) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } 0 \leq x \leq 3\text{m, μονάδες στο S.I.}$$

iv) α) Με βάση την πρώτη εξίσωση που βρήκαμε, το σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x=1,25\text{m}-0,5\text{m}=0,75\text{m}$ και η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y_{1\Sigma} = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu(40\pi t) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(0,75\pi) \cdot \eta\mu(40\pi t) = 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu(40\pi t) \rightarrow$$

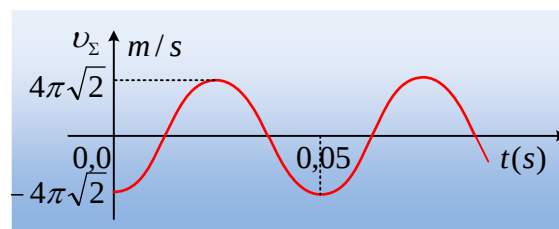
$$y_{1\Sigma} = -0,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta\mu(40\pi t) = 0,1\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40\pi t + \pi) \text{ (S.I.) (1)}$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσής του θα είναι:

$$v_{1\Sigma} = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi) = 0,1\sqrt{2} \cdot 40\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi) = 4\pi\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi) \text{ ή}$$

$$v_{1\Sigma} = -4\pi\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης της ταχύτητας είναι αυτή του σχήματος:



β) Αν δεχτούμε την δεύτερη εξίσωση του στάσιμου, θα έχουμε:

$$y_{2/\Sigma} = 0,2 \cdot \eta\mu(1,25\pi) \cdot \eta\mu(40\pi) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu(40\pi) \rightarrow$$

$$y_{2/\Sigma} = -0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu(40\pi) = 0,2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta\mu(40\pi + \pi) \rightarrow$$

$$y_{2/\Sigma} = 0,1\sqrt{2} \cdot \eta\mu(40\pi + \pi)$$

Αλλά η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση (1) που βρήκαμε και στην προηγούμενη εκδοχή. Οπότε τα πάντα από κει και πέρα είναι τα ίδια, συνεπώς η παραπάνω γραφική παράσταση ισχύει προφανώς και σε αυτήν την εκδοχή!

Συμπέρασμα;

Είναι φανερό, ότι η ταλάντωση του σημείου Σ (αλλά και κάθε σημείου), είναι μία και δεν εξαρτάται από την δική μας επιλογή του άξονα x. Η επιλογή του άξονα (συνεπώς και της αρχής του x=0) αλλάζει τη μορφή της μαθηματικής εξίσωσης, αλλά όχι και την φυσική πραγματικότητα!!!

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης