Φθίνουσα και εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ένα σώμα μάζας 2kg δένεται από το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 200N/m το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετακινούμε το σώμα προς τα πάνω και το φέρνουμε στην θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Την χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε το σώμα ελεύθερο από την θέση αυτή και εκτελεί ταλάντωση. Πάνω στο σώμα εκτός από την δύναμη επαναφοράς ασκείται και εξωτερική δύναμη αντίστασης της μορφής F΄= -bυ, όπου b η σταθερά απόσβεσης και υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος. Παρατηρούμε ότι μετά από 2s το πλάτος της ταλάντωσης έχει υποτετραπλασιαστεί. Να βρείτε:

i) την ενέργεια που προσφέρθηκε αρχικά στο σύστημα για να εκτελέσει ταλάντωση και την αρχική επιτάχυνση του σώματος.

ii) την σταθερά Λ της ταλάντωσης και το έργο της δύναμης αντίστασης από την t = 0 ως την 2s.

iii) την απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας συναρτήσει του χρόνου.

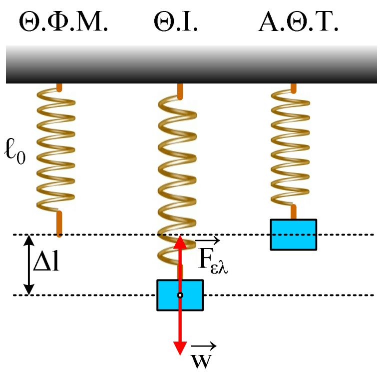
Μετά την 2s εξαναγκάζουμε το σύστημα σε αμείωτη ταλάντωση, οπότε ασκούμε μια κατάλληλη εξωτερική περιοδική δύναμη.

iv) Ποια πρέπει να είναι η τιμή της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος αυτό που είχε τη στιγμή t=2s;

v) Ποιος είναι ο ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας της εξωτερικής δύναμης όταν το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του;

Δίνεται: $g=10\ m/s^2$, ln2=0,7 και ότι η σταθερά απόσβεσης είναι αρκετά μικρή ώστε να θεωρήσουμε την περίοδο ίση με την περίοδο της αμείωτης ταλάντωσης του σώματος.

Απάντηση:



i) Η ενέργεια που προσφέρθηκε αρχικά στο σύστημα $E_T = \frac{1}{2}DA^2$ είναι η ολική ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος. όπου το πλάτος Α είναι η αρχική εκτροπή από την Θ.Ι. και D=k .

Από το σχήμα φαίνεται ότι Α= Δl και Δl η επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους.

Ισχύει :
$$\Sigma Fy = 0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda.} - mg = 0 \Leftrightarrow k\Delta l = mg \Leftrightarrow$$
$$\Delta l = \frac{mg}{k} \Leftrightarrow \Delta l = 0{,}1m$$

$$\text{Άρα : } E_T = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = 1J$$

Στην πάνω ακραία θέση, το σώμα, αμέσως μόλις αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος. Το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, ενώ η δύναμη απόσβεσης είναι μηδενική αφού υ=0. Συνεπώς : ΣF=m·α → mg=m·α ή $\alpha_0=g=10m/s^2$.

Επειδή στο σώμα εκτός από την δύναμη επαναφοράς ασκείται και δύναμη αντίστασης της μορφής F΄= -bυ η ταλάντωση είναι φθίνουσα και το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, δηλαδή ισχύει η σχέση :

$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}, t \in R^+$ με Αo=0,1m . Άρα έχουμε :

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot 2} \Leftrightarrow \Lambda \cdot 2 = \ln 4 \Leftrightarrow \Lambda = \frac{2\ln 2}{2} \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2 = 0,7 s^{-1}$$

Το έργο της δύναμης αντίστασης είναι αριθμητικά ίσο με την ενέργεια που χάθηκε από 0 ως 2s, δηλαδή ισχύει :

$$W_{F_{\alpha\nu\tau.}} = \mathrm{E}_{(t=2s)} - \mathrm{E}_{(t=0)} = \frac{1}{2}DA_2 - \frac{1}{2}DA_0 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A_0}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}kA_0^{\ 2} \Leftrightarrow$$

$$W_{F_{\alpha\nu\tau.}} = \frac{1}{2}k\frac{A_0^2}{16} - \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{E_0}{16} - E_0 = -\frac{15}{16}E_0 = -0,9375J$$

ii) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας θα είναι της μορφής :

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_o) = A_o \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_o)$$

Με Αo=0,1m , Λ=0,7s^{-1}, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 rad/s$ ενώ και φο $= \frac{\pi}{2}$ rad επειδή την t=0 το σώμα βρίσκεται στην θέση +Α επομένως καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$x = 0.1 \cdot e^{-0.7t} \eta\mu(10t + \pi/2) = 0.1 \cdot e^{-0.7t} \sigma\upsilon\nu 10t \quad (S.I.)$$

iii) Στη συνέχεια ασκώντας μια κατάλληλη εξωτερική περιοδική δύναμη η ταλάντωση γίνεται εξαναγκασμένη και το πλάτος της ταλάντωσης, μετά την χρονική στιγμή 2s, παραμένει σταθερό.

Για να ταλαντώνεται το σύστημα με μέγιστο πλάτος πρέπει η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης (διεγέρτης) να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, και το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Δηλαδή να ισχύει :

$$f_\Delta = f_o \Leftrightarrow f_\Delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} Hz$$

και το σύστημα ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $A_{max} = \frac{A_0}{4}$ =0,025m.

iv) Ο ρυθμός με τον οποίο ο διεγέρτης προσφέρει ενέργεια στο σύστημα μετά τη χρονική στιγμή 2s είναι :

$$\frac{dW_{F_{\varepsilon\xi.}}}{dt} = \frac{F_{\varepsilon\xi.} \cdot dx}{dt} = F_{\varepsilon\xi.} \cdot \upsilon$$

Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού($f_\Delta = f_o$ ή $\omega_\Delta = \omega_o$=10rad/s) θα έχουμε :

$$F_{\varepsilon\xi.} = -F_{\alpha\nu\tau.} = b\upsilon \quad \text{με } \Lambda = \frac{b}{2m} \quad \text{ή } b = \Lambda \cdot 2m = 2.8 \text{ kg/s.}$$

Οπότε από την προηγούμενη σχέση θα ισχύει :

$$\frac{dW_{F_{\varepsilon\xi.}}}{dt} = F_{\varepsilon\xi.} \cdot \upsilon = (b\upsilon) \cdot \upsilon = b\upsilon^2$$

Επειδή το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του θα είναι $\upsilon = \upsilon_{max} = \omega \cdot A_{max} = \omega \cdot \frac{A_0}{4}$ και τελικά:

$$\frac{dW_{F_{\varepsilon\xi.}}}{dt} = b\upsilon_{\max}^2 = 0.175 J / s$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Στελίου Κωνσταντίνος