Μία σύνθεση ταλαντώσεων

Ένα σώμα μάζας m=0,2kg εκτελεί μία α.α.τ. της οποίας η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από την επαλληλία των εξισώσεων απομάκρυνσης δύο άλλων απλών αρμονικών ταλαντώσεων με $x_1 = \frac{1}{2}\eta\mu\left(20t + \varphi_{o,1}\right)(S.I.)\ \kappa\alpha\iota\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\left(20t + \frac{2\pi}{3}\right)(S.I.)$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα είναι A=1m.

α. Να υπολογίσετε την αρχική φάση $\varphi_{o,1}$ της αρμονικής ταλάντωσης με εξίσωση x_1=f(t), διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.

β. Να γράψετε της εξίσωση της ταχύτητας της σύνθετης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο, εάν $\varphi_{o,1} < \varphi_{o,2}$.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1, αν το έργο που εκτελείται από την δύναμη επαναφοράς για 1η φορά από τη στιγμή t=0, μέχρι τη στιγμή t_1, είναι ίσο με $W_{\Sigma F\varepsilon\pi} = +\frac{E}{4}$, όπου E η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης.

δ. Όταν το σώμα διέρχεται από την θέση x=+0,5m απομακρυνόμενο την θέση ισορροπίας του, να υπολογίσετε:

δ₁) τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του

δ₂) τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας

δ₃) τον χωρικό ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $\left(\frac{dU}{dx}\right)$.

Λύση:

α) Για το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}$$

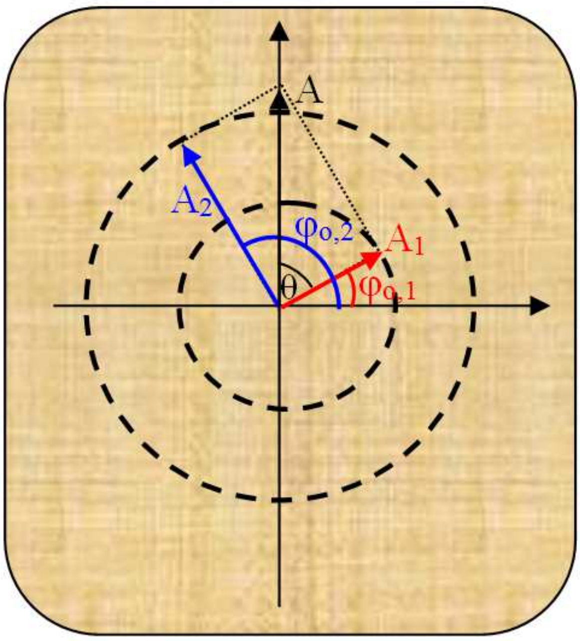
Οπότε

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}rad$$

Έτσι:

- Εάν $\varphi_{o,1} < \varphi_{o,2} = \frac{2\pi}{3}rad$, τότε $\Delta\varphi = \varphi_{o,2} - \varphi_{o,1} \Rightarrow \varphi_{o,1} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_{o,1} = \frac{\pi}{6}rad$
- Εάν $\varphi_{o,1} > \varphi_{o,2} = \frac{2\pi}{3}rad$, τότε $\Delta\varphi = \varphi_{o,1} - \varphi_{o,2} \Rightarrow \varphi_{o,1} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_{o,1} = \frac{7\pi}{6}rad$

β) Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα έχουμε:



$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} rad$$

Έτσι, η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\,\omega t + \varphi_{o,1} + \theta) \Rightarrow y = 1 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I.)$$

Οπότε η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης θα είναι:

$$u = \omega A\sigma\upsilon\nu(\,\omega t + \varphi_{o,1} + \theta) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I.)}}$$

γ) Το έργο της δύναμης επαναφοράς θα υπολογιστεί με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F_{\varepsilon\pi}}$$

Για t=0: $u = 20\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\Sigma F_{\varepsilon\pi}} \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 - 0 = +\frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2 \Rightarrow u = \pm\frac{\omega A}{2}$$

Οπότε με αντικατάσταση στην χρονική εξίσωση απομάκρυνσης έχουμε:

$$\pm\frac{\omega A}{2} = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow 20t + \frac{\pi}{2} = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{6\kappa\pi \pm 2 - 3}{120}$$

Και επειδή ζητείται πότε αυτό συμβαίνει για 1^{η} φορά:

$$k = 1{:}\ \boxed{\boldsymbol{t = \frac{1}{120}s}}$$

δ₁) $\frac{dp}{dt} = \Sigma F_{\varepsilon\pi} = -D\cdot x = -m\cdot\omega^2\cdot x = -0{,}2\cdot 20^2\cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{dp}{dt} = -40\frac{kg\cdot m}{s^2}}}$

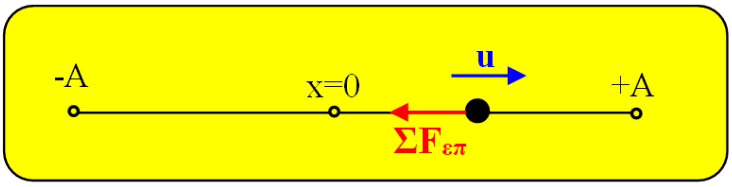
δ₂) Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε ότι:

$$\Delta K = W_{\Sigma F\varepsilon\pi} \Rightarrow dK = dW_{\Sigma F\varepsilon\pi}$$

και άρα

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F\varepsilon\pi}}{dt} = \frac{|\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\pi}|\cdot|d\vec{x}|\sigma\upsilon\nu\varphi}{dt} = |\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\pi}|\cdot|\vec{u}|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o$$

διότι όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση x=+0,5m απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας του η γωνία μεταξύ δύναμης επαναφοράς και ταχύτητας είναι 180^{o}.



Είναι

$$|\Sigma F_{\varepsilon\pi}| = D|x| = 40N$$

ενώ με εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ βρίσκουμε ότι

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow |u| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$|u| = 20\sqrt{1 - 0{,}25} \Rightarrow |u| = 10\sqrt{3}m/s$$

Έτσι:

$$\frac{dK}{dt} = -40 \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{dK}{dt} = -400\sqrt{3}\,J/s}}$$

δ$_3$) Για την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2$$

οπότε με παραγώγιση ως προς x έχουμε

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}D \cdot (2x) = -\Sigma F_{\varepsilon\pi} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{dU}{dx} = +40\,J/m}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος