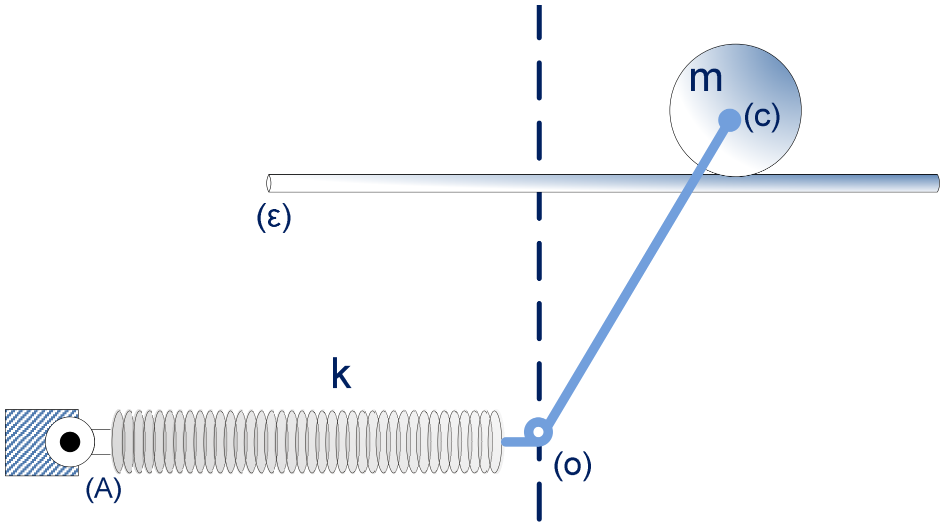
Επαναληπτικά δύσκολα θέματα

5.1. Κυλιόμενος Ομογενής Κυκλικός Δίσκος και ΑΑΤ.

Κατά μήκος οριζόντιας ευθείας (ε), μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ομογενής κυκλικός δίσκος μάζας m και ακτίνας R. Το κέντρο (c) του δίσκου συνδέεται με σταθερό σημείο Α, μέσω εκτατού νήματος (γραμμικό ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ_0=(ΑΟ)), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επιπλέον το νήμα διέρχεται από σταθερό δακτύλιο (ο).



Εάν απομακρύνουμε τον κυκλικό δίσκο από τη θέση ισορροπίας του κατά x_0 και τη χρονική στιγμή t=0 τον αφήσουμε ελεύθερο, να δείξετε ότι το κέντρο του δίσκου θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση περί της κατακόρυφου που διέρχεται από το δακτύλιο ο. Επίσης να βρεθούν:

α) η περίοδος της ταλάντωσης.

β) η εξίσωση της απομάκρυνσης του κέντρου του κυκλικού δίσκου από τη θέση ισορροπίας ως συνάρτηση του χρόνου.

γ) η χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής, της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

δ) η στροφική, μεταφορική και ολική κινητική ενέργεια του κυκλικού δίσκου ως συνάρτηση του χρόνου.

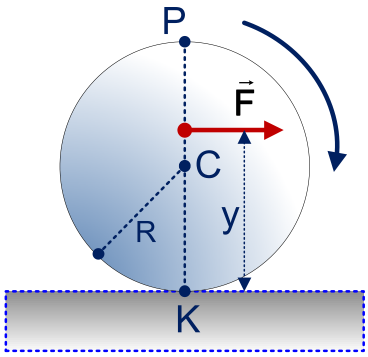
ε) ο λόγος της στροφικής προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του δίσκου.

στ) ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής, μεταφορικής και ολικής κινητικής ενέργειας, όταν ο δίσκος διέρχεται από τη θέση $x=x_0/2$.

Δίνεται $\mathbf{I_c = \frac{1}{2}mR^2}$

5.2. Κυκλικός Δίσκος ο οποίος Δέχεται Εξωτερική Δύναμη

Ένας κυκλικός δίσκος μάζας m=4Kg και ακτίνας R=0,2m ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t=0, ασκείται στον κυκλικό δίσκο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=15N & αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει (ο συντελεστής τριβής μ σε κάθε περίπτωση παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή) κατά μήκος του οριζοντίου επιπέδου. Εάν ο φορέας της δύναμης βρίσκεται στο επίπεδο του δίσκου και απέχει απόσταση y από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



i) Να προσδιορίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις και να κατασκευάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

α) α=f(y) β) Τ=f(y) γ)μ_{min}=f(y)

ii) Ποια η φόρα και ποιο το μέτρο της τριβής, όταν η δύναμη F ασκείται στα σημεία C, P;

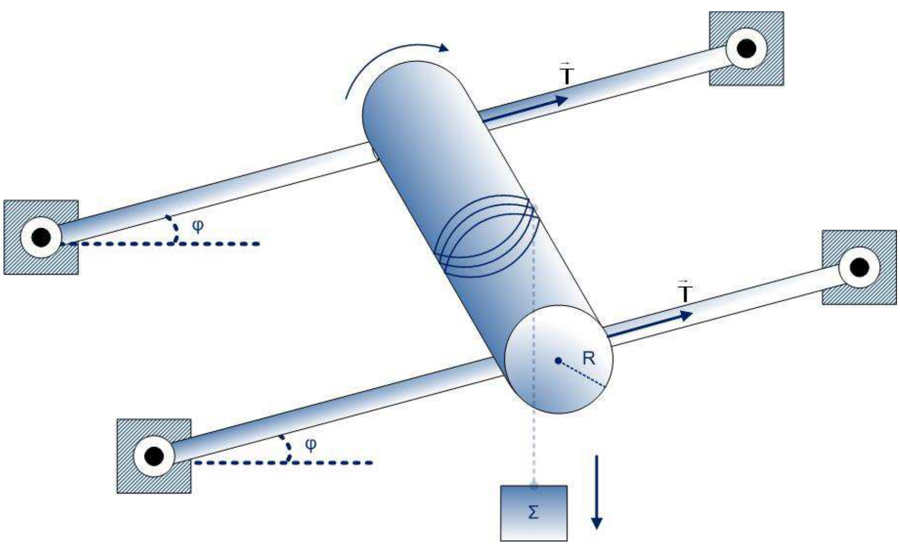
iii) Σε πόση απόσταση (y) από το οριζόντιο επίπεδο πρέπει να ασκηθεί η δύναμη F, ώστε η συνολική δύναμη που δέχεται ο κυκλικός δίσκος από αυτό να είναι ίση με το βάρος του;

iv) Αν σε κάποια χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια του κυκλικού δίσκου είναι K=90π J και η δύναμη F ασκείται σε απόσταση από το οριζόντιο επίπεδο ίση με εκείνη που προκύπτει από το ερώτημα 3, να προσδιορίσετε τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει ο κυκλικός δίσκος καθώς και το διάστημα που έχει διανύσει ως αυτή τη χρονική στιγμή.

Δίνεται: $I_{cm\ (\text{κυκλικού δίσκου})} = \frac{1}{2}mr^2, g = 10\,m/s^2$

5.3. Ομογενής Κύλινδρος με Δεμένο Σχοινί Κίνηση σε Κεκλιμένο Επίπεδο.

Ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R εφάπτεται επί κεκλιμένων δοκών και είναι τυλιγμένος με αβαρές μη εκτατό σχοινί μεγάλου μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού έχει δεθεί σώμα (Σ) μάζας M=2m.



Το σύστημα αρχικά ισορροπεί και το σχοινί είναι τεντωμένο. Την χρονική στιγμή t=0 ελευθερώνουμε το σύστημα και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλάει προς τα επάνω, χωρίς να ολισθαίνει. Θεωρώντας ότι το σχοινί παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, να υπολογιστούν:

i) η γωνιακή επιτάχυνση & η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, καθώς και η επιτάχυνση του σώματος (Σ).

ii) η τάσης του νήματος

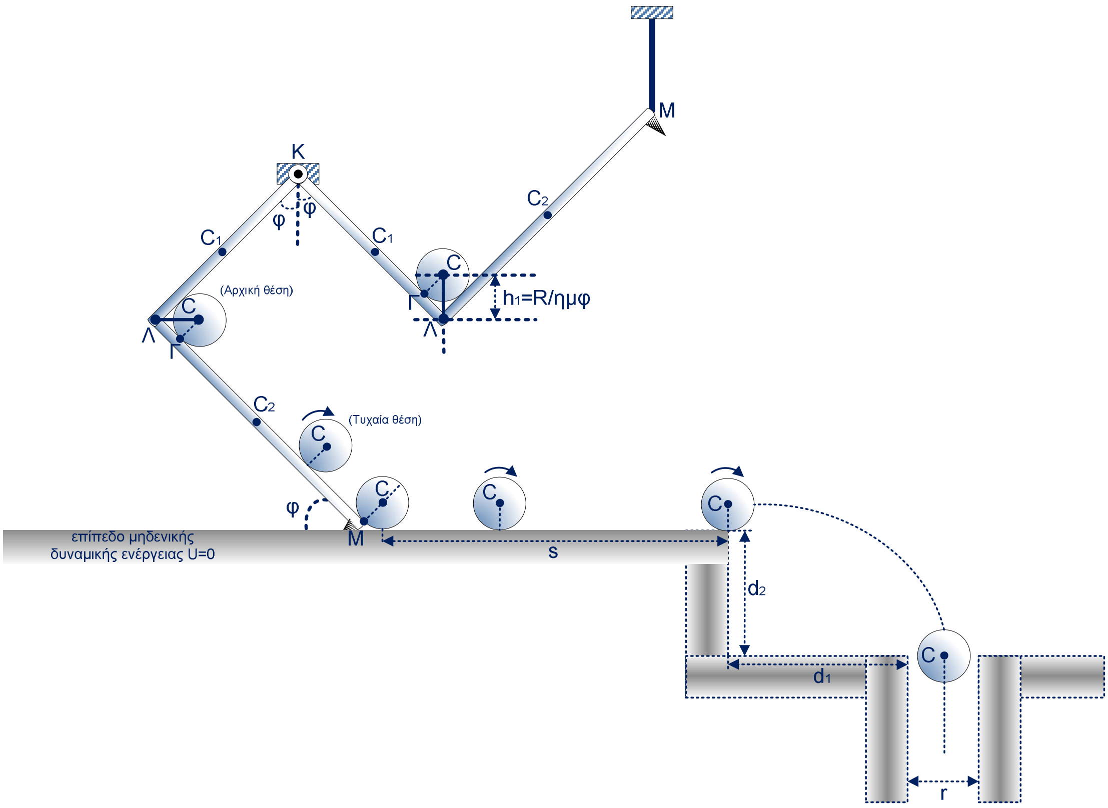
iii) η στατική τριβή

iv) η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ, ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται: $I_C = \frac{1}{2}mR^2, \varphi = \pi/6$

5.4.Τελικά ο Δίσκος θα Πέσει στο Πηγάδι

Δυο ομογενείς ράβδοι ΚΛ (m_1=3Kg, ℓ_1=1m) & ΛΜ (m_2=4Kg, ℓ_2=1,5m), εκ των οποίων η ΛΜ φέρει στο άκρο της Μ καρφί αμελητέας μάζας, είναι ενωμένες στο κοινό τους άκρο Λ, έτσι ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία $\left(\widehat{\Lambda} = 90^0\right)$. Μεταξύ των δύο ράβδων, υπάρχει ομογενής κυκλικός δίσκος μάζας m=2Kg και ακτίνας R=$\sqrt{2}/10\,\text{m}$, ο οποίος εξαρτάται από το κοινό σημείο των ράβδων (σημείο ένωσης) μέσω μη εκτατού νήματος όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο επαφής (Γ) μεταξύ του δίσκου και της ράβδου ΚΛ, απέχει από την άρθρωση (σημείο Κ) απόσταση ($5\ell_1$)/6.



Αρχικά η όλη διάταξη βρίσκεται σε ισορροπία (το άκρο Μ της ράβδου ΛΜ συνδέεται με σταθερό σημείο, μέσω μη εκτατού νήματος), με την ράβδο ΚΛ να σχηματίζει γωνία $\widehat{\varphi} = 45^0$ με τη κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο Κ. Την χρονική στιγμή $t = 0$, σπάει το νήμα στο σημείο Μ, και το όλο σύστημα ράβδοι-κύλινδρος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές, περί οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο ΚΛΜ, που διέρχεται από το άκρο Κ της ράβδου ΚΛ. Όταν το σύστημα διαγράψει γωνία 90^0, η ράβδος ΛΜ έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο και στερεώνεται. Την στιγμή που το σύστημα ακινητοποιείται, το νήμα στο σημείο Λ σπάει και ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος της ράβδου ΛΜ (σχηματίζεται κεκλιμένο επίπεδο).

Α. Αν η στατική τριβή μεταξύ της ράβδου ΛΜ και του δίσκου είναι T_1, να υπολογιστούν:

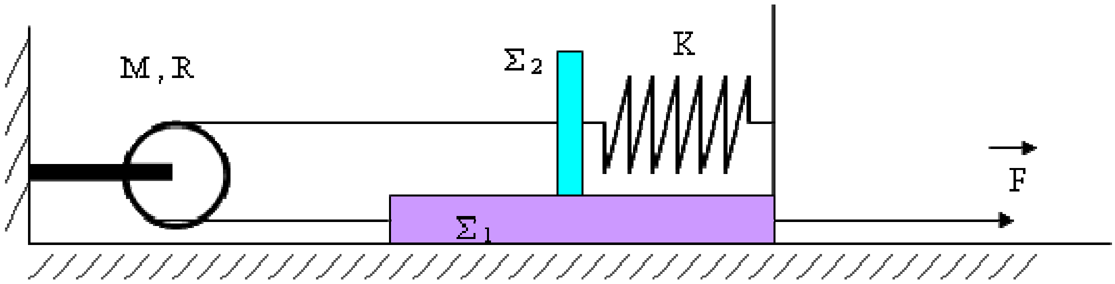
1. η τάση του νήματος στο σημείο Μ και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στο άκρο Κ της ράβδου ΚΛ.
2. η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο ΚΛΜ, ο οποίος διέρχεται από το Κ.
3. η αρχική (όταν κόβεται το νήμα στο σημείο Μ) και η τελική (όταν η ράβδος ΛΜ στερεώνεται στο έδαφος) γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.
4. η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, τη στιγμή που η ράβδος ΛΜ στερεώνεται στο έδαφος.
5. η γραμμική ταχύτητα τους σημείου Μ, τη στιγμή που η ράβδος ΛΜ στερεώνεται στο έδαφος.
6. η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ_1, ώστε ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.
7. η γωνιακή επιτάχυνση & η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυκλικού δίσκου.
8. η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου, η γωνιακή του ταχύτητα, ο αριθμός των στροφών που έχει εκτελέσει και η κατακόρυφη μετατόπιση του, την στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
9. για το σύστημα, τη στιγμή που η ράβδος ΛΜ στερεώνεται στο έδαφος, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής,
10. για το δίσκο, τη στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, οι ρυθμοί μεταβολής της στροφικής και μεταφορικής κινητικής ενέργειας, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής.

Β. Ο κυκλικός δίσκος μόλις φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, περνά χωρίς απώλειες ενέργειας σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ ταυτόχρονα δέχεται στο κέντρο μάζας του οριζόντια δύναμη F=5N με φορά προς τα δεξιά. Στην συνέχεια μετά από απόσταση S=3m, ο δίσκος εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο ενώ ταυτόχρονα παύει να εφαρμόζεται η δύναμη F.

1. Αν η στατική τριβή μεταξύ του δίσκου και του οριζοντίου επιπέδου είναι T_2 και ο συντελεστής στατικής τριβής μ_2=0,1, να εξετάσετε εάν ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο.
2. Αν σε απόσταση d_1=2m από το σημείο που ο δίσκος εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο, υπάρχει πηγάδι διαμέτρου r=1m, να εξετάσετε αν ο δίσκος θα πέσει στο πηγάδι. Επιπλέον το πηγάδι βρίσκεται σε απόσταση d_2=1m, κάτω από το οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται: $I_{cm\,(ράβδου)} = \frac{1}{12}m\ell^2$, $I_{cm\,(δίσκου)} = \frac{1}{2}mr^2$, $g = 10\,m/s^2$, $\sqrt{2} = 1,4$

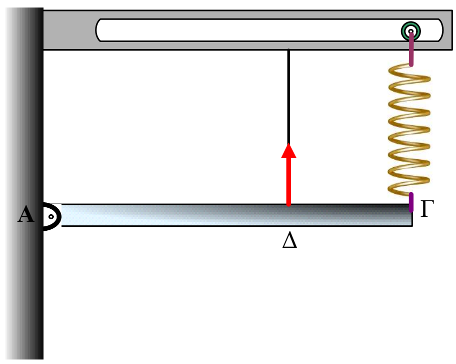
5.5.Και αν κινείται και η βάση;



Στην παραπάνω διάταξη η σανίδα Σ_1 έχει μάζα $m_1 = 21$ kg και μεγάλο μήκος , το σώμα Σ_2 έχει μάζα $m_2 = 8$ kg και για την τροχαλία δίνονται M = 2 kg , $I = M R^2 / 2$. Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 είναι δεμένα μεταξύ τους με αβαρές νήμα το οποίο περνά από περιφέρεια της τροχαλίας και το Σ_2 δεμένο στο άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K = 160 N / m ,του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα δεμένο στο στέλεχος που βρίσκεται καρφωμένο στη σανίδα . Τριβές δεν υπάρχουν . Αρχικά το σύστημα ηρεμεί με το νήμα τεντωμένο και το ελατήριο στο φυσικό του μήκος . Τη στιγμή t = 0 ασκούμε στη σανίδα την οριζόντια δύναμη που φαίνεται στο σχήμα , με μέτρο που μεταβάλλεται με την παραμόρφωση d του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος , ώστε F = 320 d + 7,5 (S I) . Παρατηρούμε ότι τα σώματα κινούνται με σταθερή επιτάχυνση και το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας .

i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 .
ii) Τη χρονική στιγμή που το μέτρο της δύναμης είναι 71,5 N , να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της τροχαλίας .
iii) Τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ s , καταργούμε τη δύναμη , κόβουμε το νήμα και ακινητοποιούμε ακαριαία τη σανίδα . Να υπολογίσετε το πλάτος της α α τ που θα εκτελέσει το σύστημα ελατηρίου – Σ_2
iv) Όταν το Σ_2 βρεθεί στη μέγιστη θετική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του (t = 0),αρχίζει να επιδρά δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = - b\,\upsilon$, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο . Θεωρούμε ότι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με την περίοδο της ελεύθερης αμείωτης ταλάντωσης του συστήματος .Μετά από 5 πλήρεις ταλαντώσεις, το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι $-\dfrac{975}{128}$ J . Να υπολογίσετε τη σταθερά Λ της ταλάντωσης .

5.6. Μια …άλλη ταλάντωση στερεού.



Η ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας Μ=30kg και μήκους 2m μπορεί να στρέφεται γύρω από άρθρωση στο άκρο της Α και ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο σημείο Δ, όπου (ΑΔ)=1,25m, με κατακόρυφο νήμα και στο άκρο της Γ με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=200N/m. Στη θέση αυτή η τάση του νήματος είναι ίση με 160N.

i) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται. Το πάνω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με μια μικρή «ροδίτσα» σε εγκοπή, με αποτέλεσμα το ελατήριο να παραμένει συνεχώς κατακόρυφο.

α) Να βρεθεί η μέγιστη γωνία που θα διαγράψει η ράβδος πριν σταματήσει στιγμιαία.

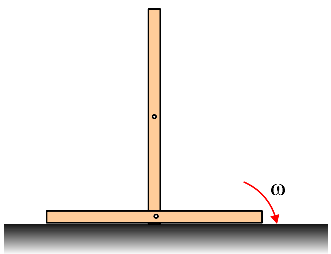
β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στη παραπάνω θέση;

iii) Να υπολογιστεί η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου κατά τη διάρκεια της κίνησής της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= 1/3\ M\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

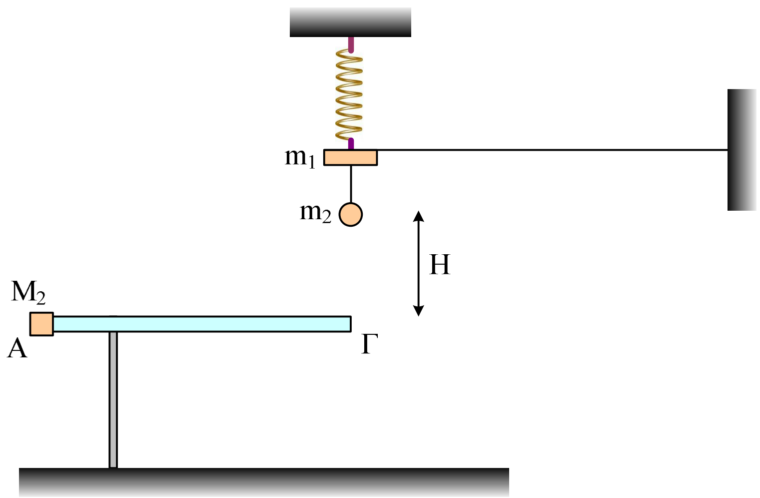
5.7. Ολίσθηση ράβδου

Μια ράβδος μάζας m και μήκους L στέκεται κατακόρυφη πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Επειδή η θέση ισορροπίας είναι ασταθής, εκτρέποντας ελαφρώς τη ράβδο αυτή αρχίζει να πέφτει περιστρεφόμενη και ενώ το ένα της άκρο είναι πάντα σε επαφή με το δάπεδο. Να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που πέφτει στο έδαφος. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g, ενώ για τη ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$.



5.8.. Μια πραγματικά σύνθετη άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα η ράβδος ΑΓ έχει μάζα Μ=2kg και μήκος L=6m ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια καρφιού που βρίσκεται σε απόσταση l=2m από το ένα της άκρο της Α. Στο άκρο Α υπάρχει κολλημένο πάνω στη ράβδο σώμα μάζας M_2.



Πάνω στην ίδια κατακόρυφο με την άλλη άκρη Γ της ράβδου υπάρχει κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $K=200\pi^2$N/m με την πάνω άκρη του στερεωμένη. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα μάζας m_1=0,5kg στο άκρο του οποίου είναι δεμένη οριζόντια ελαστική χορδή πάνω στην οποία μπορεί να διαδοθεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα U=2 m/sec.Μέσω ενός δεύτερου κατακόρυφου νήματος το σώμα μάζας m_1 συνδέεται με δεύτερο σώμα μάζας m_2=0,5kg.Το σώμα μάζας m_2 απέχει κατακόρυφη απόσταση από το άκρο Γ της ράβδου ύψος H=1,25m. Στο σώμα μάζας m_1 υπάρχει ηχητική πηγή αρμονικών ήχων συχνότητας Fs=680Hz ενώ στο σώμα μάζας m_2 υπάρχει ανιχνευτής ηχητικών κυμάτων. Κάποια στιγμή το κατακόρυφο νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_2 συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο. Να βρεθούν:

Α Η μάζα M_2

Β) Να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ήχων που βρίσκεται στο σώμα μάζας m_2 μέχρι την στιγμή που αυτή συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο και να βρεθεί η συχνότητα του ανιχνευτή ελάχιστα πριν την κρούση.

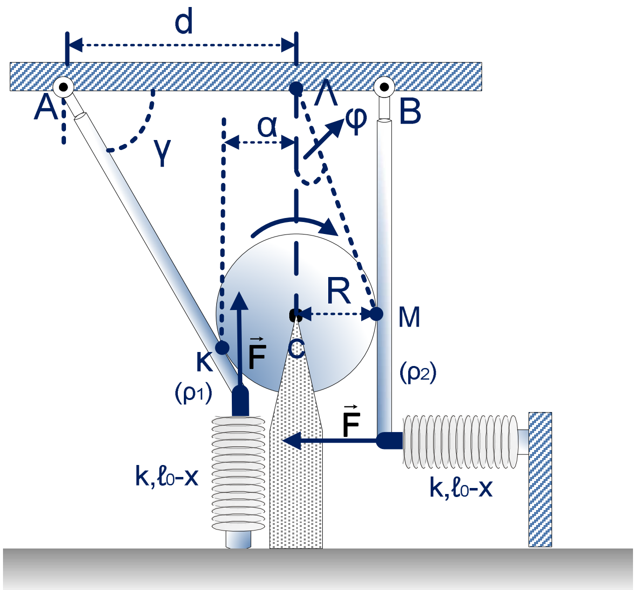
Γ) Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την πλαστική καθώς και η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής αμέσως μετά την πλαστική κρούση αν υποθέσουμε ότι η κρούση ήταν ακαριαία.

Δ) Η μορφή της οριζόντιας ελαστικής χορδής την στιγμή που γίνεται η πλαστική κρούση.

Δίνεται για την ράβδο $I_{cm}=1/12\ M\cdot L^2$ η ταχύτητα του ήχου υηχ=340m/sec το g=10m/sec^2 και π^2=10. Ολα τα σώματα εκτός της ράβδου να θεωρηθούν σημειακά.

5.9. Κυκλικός δίσκος επιβραδύνεται από Δυο Αβαρής Ράβδους

Κυκλικός δίσκος ακτίνας **R** και μάζας **m**, περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_0}$ (η τριβή στον άξονα περιστροφής θεωρείται αμελητέα). Προκειμένου να επιβραδύνουμε το κυκλικό δίσκο, χρησιμοποιούμε αβαρής ράβδους μήκους **ℓ**, όπου στο άκρο της καθεμίας, τη χρονική στιγμή **t=0** ασκείται δύναμη **F**. Οι δυνάμεις αυτές ασκούνται μέσω δύο όμοιων ελατηρίων, σταθεράς k και φυσικού μήκους $\boldsymbol{\ell_0}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (τα ελατήρια έχουν την ίδια συσπείρωση **x**).



Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ ράβδου (ρ_1) και κυκλικού δίσκου είναι $\mathbf{\mu_1}$, ενώ μεταξύ ράβδου (ρ_2) και δίσκου είναι $\mathbf{\mu_2}$, με $\mathbf{\mu_1>\mu_2}$, και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στο άκρο Β της ράβδου (ρ_2) είναι $\mathbf{N_y}$, να υπολογιστούν:

α) η συσπείρωση x των ελατήριων και οι κάθετες αντιδράσεις που δέχονται οι ράβδοι από τον κυκλικό δίσκο, στα σημεία Κ και Μ. Επίσης να δείξετε $\mathbf{T_1(2d)>T_2(3R\sigma\upsilon\nu\varphi)}$.

β) η γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του κυκλικού δίσκου.

γ) η χρονική στιγμή, κατά την οποία ο κυκλικός δίσκος σταματάει να κινείται.

δ) ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος, μέχρι να μηδενιστεί η γωνιακή του ταχύτητα.

ε) το έργο των ροπών των δυνάμεων που επιβραδύνουν το δίσκο, μέχρι να σταματήσει να κινείται.

στ) το πόσο της θερμικής ενέργειας που εκλύεται, όταν ο δίσκος έχει εκτελέσει $\mathbf{n_1}$ περιστροφές.

ζ) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου, κατά τη χρονική στιγμή που $\mathbf{\omega=\omega_0/4}$.

η) ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

θ) η συνολική στιγμιαία ισχύς των ροπών των δυνάμεων που επιβραδύνουν το κυκλικό δίσκο, τη χρονική στιγμή κατά την οποία γίνεται $\mathbf{\omega=\omega_0/3}$.

ι) η μέση συνολική ισχύς των ροπών των δυνάμεων που επιβραδύνουν το κυκλικό δίσκο.

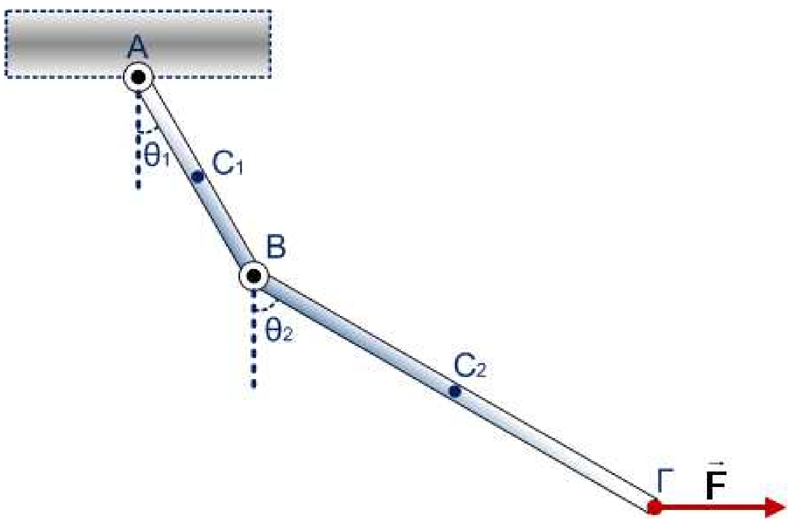
κ) το ρυθμό με τον οποίο πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια στο δίσκο, ώστε η ταχύτητα του να παραμένει αμετάβλητη.

Δίνεται $I_C=(1/2)mR^2$, α=d/3

5.10. Ισορροπία Συστήματος το οποίο Περιλαμβάνει Δυο Ράβδους

Στη διάταξη του παρακάτω σχήματος οι ράβδοι ΑΒ & ΒΓ έχουν μάζα m=0,2Kg η κάθε μια & μήκη ℓ_1, ℓ_2 αντίστοιχα. Αν το όλο σύστημα ισορροπεί με τη βοήθεια οριζόντιας δύναμης $F=\sqrt{3}$N, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να προσδιοριστούν:

1. οι γωνίες θ_1 και θ_2.
2. η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στο άκρο Α της ράβδου ΑΒ.



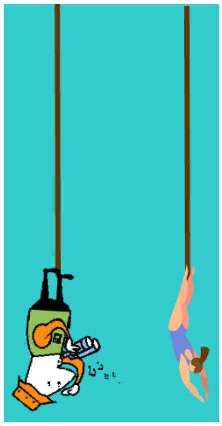
5.11. Κρεμασμένοι στα λάστιχα του bungee jumping.

Ο Γιώργος ζυγίζει 90 kg και κρέμεται από ένα λάστιχο του bungee jumping.

Η Μαρία κρέμεται από ένα όμοιο λάστιχο έτσι ώστε να είναι στο ίδιο ύψος με τον Γιώργο. Δύο φίλοι τους τούς θέτουν σε ταλάντωση ανεβάζοντας τη Μαρία 1 m, κατεβάζοντας 1 m τον Γιώργο και αφήνοντάς τους ελεύθερους.

Ο Γιώργος βλέπει ότι η Μαρία ταλαντεύεται με πλάτος μεταβλητό. Νομίζει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών διαβάσεων της Μαρίας από μπροστά του μεσολαβεί χρόνος 1 s. Επίσης Βλέπει τη Μαρία να ακινητοποιείται στιγμιαία κάθε 5 s.

Πόση είναι η μάζα της Μαρίας;



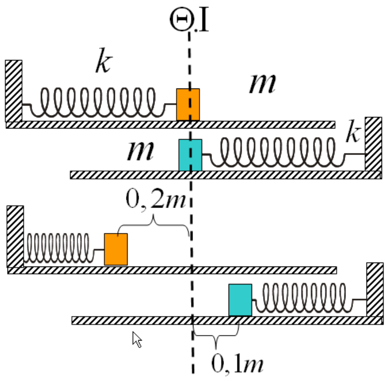
5.12. Συνάντηση Ταλαντωτών.

Δυο όμοιοι αρμονικοί ταλαντωτές ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση με περιόδους 12 s.

Εκτρέπομε τον πορτοκαλί κατά 0,1 m και τον θαλασσί κατά 0,2 m. Αφήνουμε ελεύθερο τον θαλασσί και μετά από 4 s τον πορτοκαλί.

Ποιες χρονικές στιγμές συναντώνται. Λέγοντας συναντώνται εννοούμε ότι βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Σε ποιες θέσεις;

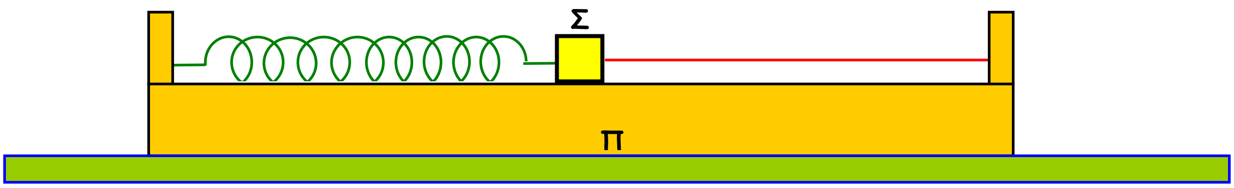


5.13. Ταλάντωση πάνω σε κινούμενη πλατφόρμα.

Σώμα Σ μάζας m=1kg είναι, αρχικά, ακίνητο πάνω σε λεία πλατφόρμα Π μάζας M=10kg που είναι, αρχικά, ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Το σώμα είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=11N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο στο ένα άκρο της πλατφόρμας, και στο άκρο ιδανικού νήματος, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο στο άλλο άκρο της πλατφόρμας.

Αρχικά το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta l_0=\sqrt{10}\,/10$m.



Κάποια χρονική στιγμή που θεωρείται αρχή των χρόνων κόβεται το νήμα.

i) Να βρεθούν:

α. η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει κάθε σώμα

β. η μετατόπιση κάθε σώματος ώσπου η ταχύτητά του να γίνει μέγιστη

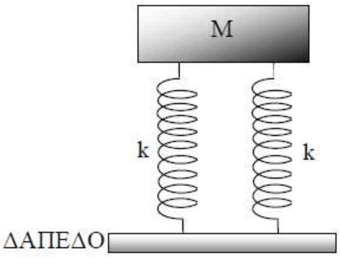
ii) Να δειχτεί ότι κάθε σώμα θα πραγματοποιήσει γραμμική αρμονική ταλάντωση

iii) Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης κάθε ταλάντωσης

iv) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος

5.14. Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Όταν ο διεγέρτης είναι μια ταλάντωση.

Το ομογενές τραπέζι ενός εργαστηρίου πειραμάτων Φυσικής, όπως αυτό του σχήματος, έχει μάζα Μ και συνδέεται μέσω δύο ιδανικών ελατηρίων σταθεράς k με κινητό δάπεδο. Το δάπεδο συγκρατείται ακίνητο ως προς το έδαφος και το σύστημα ισορροπεί. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το τραπέζι από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο.



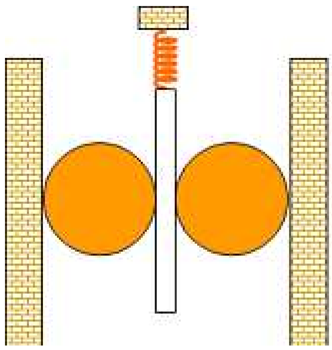
Α. Να δείξετε ότι το τραπέζι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητά της ω_0.

Β. Συνδέουμε το τραπέζι με μηχανισμό επιβράδυνσης ο οποίος ασκεί στο τραπέζι δύναμη της μορφής $F' =-b\upsilon$, όπου b = η σταθερά απόσβεσης και υ = η ταχύτητα του τραπεζιού. Με κατάλληλο μηχανισμό θέτουμε το δάπεδο σε αμείωτη αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$.

B_1. Να δείξετε ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το τραπέζι, όταν αποκατασταθεί η μόνιμη κατάσταση, είναι ίδια με αυτήν που θα εκτελούσε, αν σ' αυτό επιδρούσε εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγέρτης) της μορφής $F_\delta=F_{0\delta}\,\eta\mu(\omega t+\theta)$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $F_{0\delta}$ και θ.

B_2. Αυξάνοντας τη γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του δαπέδου ω, παρατηρούμε ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το τραπέζι $A_{\tau\rho}$ αυξάνεται σε σχέση με μία αρχική τιμή, μεγιστοποιείται και στη συνέχεια ελαττώνεται. Με βάση το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογίσετε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του τραπεζιού $A_{\tau\rho}$ σε συνάρτηση με την γωνιακή συχνότητα ω, αφού θεωρήσετε ότι η εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το τραπέζι είναι της μορφής $x=A_{\tau\rho}\eta\mu\omega t$. Να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ του πλάτους $A_{\tau\rho}$ και του πλάτους Α της ταλάντωσης που εκτελεί το δάπεδο, για τις διάφορες δυνατές τιμές της γωνιακής συχνότητας ω. Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση $A_{\tau\rho}=f(\omega)$, στην οποία να απεικονίζεται και η τιμή του πλάτους ταλάντωσης του δαπέδου Α.

Γ. Στο τραπέζι πρόκειται να τοποθετήσουμε μια ευαίσθητη συσκευή Laser, την οποία θέλουμε να προφυλάξουμε από ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους. Από πειραματικές μετρήσεις γνωρίζουμε ότι για την προστασία της συσκευής ,είναι επιθυμητή για το τραπέζι τιμή ιδιοσυχνότητας f_0 =1Hz .Αν η σταθερά των ελατηρίων είναι k=800N/m, να υπολογιστεί η μάζα Μ του τραπεζιού. Για ποιες τιμές της συχνότητας f της ταλάντωσης του δαπέδου η συσκευή είναι ασφαλής; Ποιος ο ρόλος της μάζας Μ του τραπεζιού στην απόσβεση – εξασθένιση του πλάτους των ταλαντώσεων που εκτελεί το τραπέζι ;Ποιος ο ρόλος της τιμής του παράγοντα απόσβεσης $\frac{b}{M}$; Να θεωρήσετε ως θετική φορά για την απομάκρυνση του τραπεζιού την αντίθετη του βάρους. Δίνονται : ημ(α+β)= ημασυνβ+ημβσυνα , $\pi^2=10$, $\sqrt{2} = 1,4$,



5.15. Δύο δίσκοι, μια ράβδος και ένα ελατήριο

Στην διάταξη στου σχήματος εικονίζονται μια ράβδος μάζας Μ, δύο δίσκοι ακτίνας R και μάζας m και ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k.

Αρχικά το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Ανυψώνουμε την ράβδο τόσο ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.

Η κίνηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι δίσκοι να μην ολισθαίνουν ούτε στην ράβδο ούτε στα πλευρικά τοιχώματα.

Α) Να αποδείξετε ότι στην θέση ισορροπίας η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στην ράβδο είναι ίση με το βάρος της ράβδου αυξημένο κατά το ημιάθροισμα των βαρών των δύο δίσκων.

Β) Να αποδείξετε ότι οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες

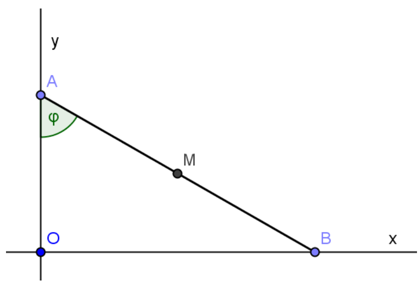
Γ) Να αποδείξετε ότι η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση της οποίας να βρείτε την περίοδο.

Δ) Να βρεθεί η ενέργεια που προσφέραμε για να ανεβάσουμε την ράβδο στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης

Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτού ομογενούς κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του διερχόμενο από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mR^2$

5.16. Μια ράβδος γλιστρά στις πλευρές ορθής γωνίας

Ορθή γωνία xOy βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και οι πλευρές της Ox και Oy είναι οριζόντια και κατακόρυφη αντιστοίχως. Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους L και μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές με τα άκρα της σε επαφή με τις πλευρές της γωνίας. Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη και ο άξονάς της είναι κατακόρυφος. Αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη να κινηθεί.



Α) Να βρεθούν συναρτήσει της γωνίας φ που σχηματίζει η ράβδος με την πλευρά Oy της γωνίας xOy.

i) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου

ii) Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου

iii) Οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από τις πλευρές της γωνίας

Β) Να βρεθεί η γωνία φ για την οποία η ράβδος χάνει την επαφή της με την πλευρά Oy.

Δίνεται η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σε αυτήν $I = \frac{1}{12}mL^2$.

5.17. Ένα βαγόνι σε κατηφόρα

Ένα βαγόνι μάζας Μ έχει τέσσερις τροχούς. Ο κάθε τροχός έχει μάζα m. Το βαγόνι βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και αφήνεται ελεύθερο από την ακινησία να κυλήσει πάνω στο επίπεδο.

Να βρεθούν:

i) Η επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα.

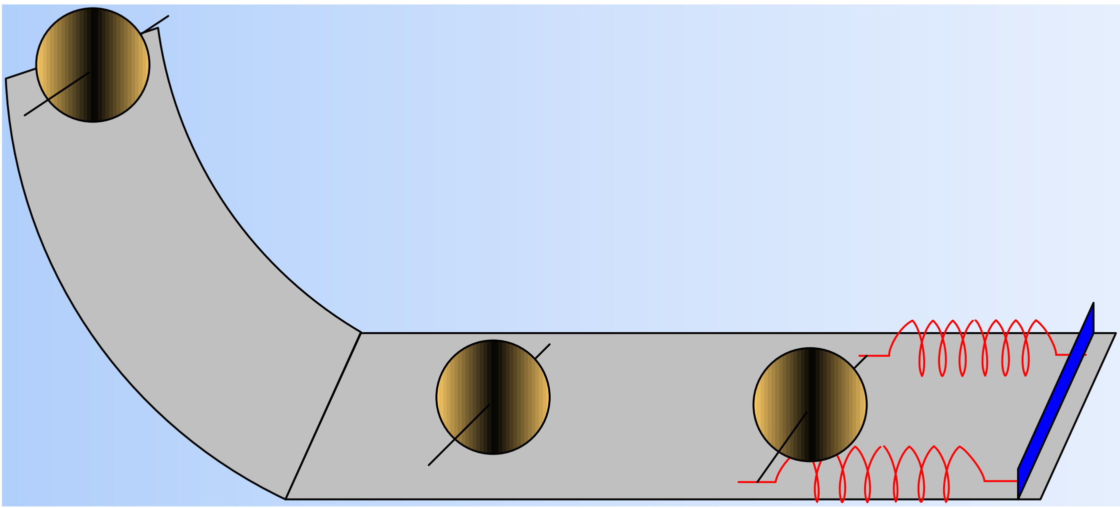
ii) Ποια η τιμή του λόγου M/m ώστε η επιτάχυνση που υπολογίσαμε να διαφέρει κατά 10% από την επιτάχυνση που θα αποκτούσε το σύστημα, αν ολίσθαινε χωρίς κύλιση πάνω στο επίπεδο.

Για τον τροχό $I = \frac{1}{2} mr^2$.

ΣΜΑ 1964

5.18. Κύλιση σε τεταρτοκύκλιο και ταλάντωση

Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R=1,95m αφήνουμε ελεύθερη μία σφαίρα μάζας M=2Kg και ακτίνας r=0,2m. Η σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά, μία αβαρή βελόνα μήκους L>2r η οποία είναι οριζόντια και περνάει από το κέντρο της σφαίρας. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο τετρτοκύκλιο και την στιγμή t=0 μπαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει οριζόντια απόσταση S=10m συναντάει χωρίς απώλεια ενέργειας ταυτόχρονα δύο οριζόντια ελατήρια σταθεράς K=1750N/m που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L. Αν σε όλη την διάρκεια της κίνησης της σφαίρας η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να βρεθούν:



Α) Η μέγιστη συσπείρωση των ελατηρίων

Β) Ο χρόνος που το κέντρο μάζας της σφαίρας κινείται ευθύγραμμα

Γ) Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για όσο χρόνο η σφαίρα κινείται ευθύγραμμα.

5.19. Ζήτημα 4ο: Ο ποδηλάτης.

Ο ποδηλάτης του σχήματος κινείται σε οριζόντιο δρόμο και βλέπει μπροστά του κάποιο εμπόδιο. Μόλις όμως πάει να φρενάρει, κόβεται το συρματόσκοινο του πίσω φρένου. Αν το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\boldsymbol{\upsilon_o = 20m/s}$ τη στιγμή που συμβαίνει αυτό, να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση που χρειάζεται, φρενάροντας μόνο με το μπροστινό φρένο, για να σταματήσει χωρίς να κινδυνέψει να πέσει.

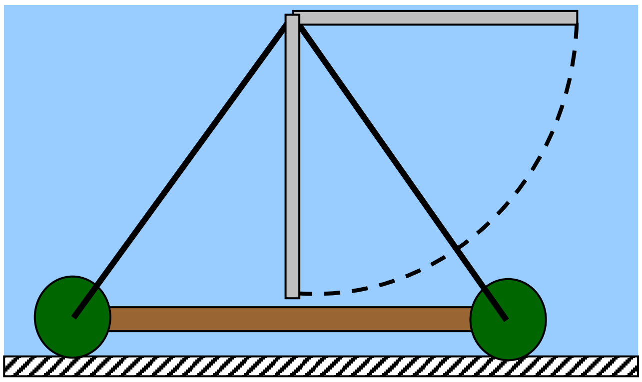
***ΔΙΝΟΝΤΑΙ*:**

Η μάζα του κάθε τροχού θεωρείται αμελητέα, ακτίνα κάθε τροχού **R=0,3m**, απόσταση K_1K_2 = **L = 1m**, μάζα ποδηλάτου – ανθρώπου **m = 60kg**, οριακός συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ασφάλτου και ελαστικού **μ = 2** και **g = 10m/s²**.

Να θεωρήσετε επίσης ότι το κέντρο μάζας *Κ* του συστήματος ισαπέχει από τα κέντρα K_1, K_2 (δηλαδή $KK_1 = KK_2$) και βρίσκεται σε ύψος **h = 1,1 m** από το έδαφος. Τέλος, το σημείο εφαρμογής *Σ* της δύναμης που ασκεί το φρένο στον τροχό βρίσκεται στην κατακόρυφη που περνάει από το κέντρο K_1 και απέχει απόσταση **R** από αυτό.

5.20. Διατήρηση ορμής του συστήματος καροτσάκι-ράβδος.

Το καροτσάκι του σχήματος έχει μάζα Μ. Η ράβδος έχει μάζα m και μήκος L.



Αρχικά το καροτσάκι και η ράβδος είναι ακίνητα ενώ η ράβδος συγκρατείται στην οριζόντια θέση. Αφήνουμε την ράβδο να κινηθεί.

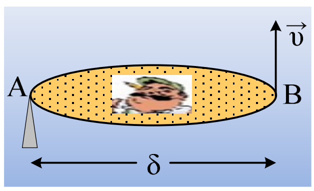
Βρείτε την ταχύτητα του καροτσιού και την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου την στιγμή που η ράβδος είναι κατακόρυφη.

Οι ρόδες έχουν αμελητέες ροπές αδράνειας.

Τριβές στις αρθρώσεις αμελητέες.

5.21. Στρίψιμο νομίσματος ή "κορώνα ή γράμματα"

πόσο τυχαίο είναι να έλθει κορώνα ή γράμματα ένα νόμισμα που το στρίβουμε στον αέρα



Εκτοξεύουμε κατακόρυφα (στρίβουμε) ένα νόμισμα διαμέτρου δ στον αέρα. Η εκτόξευση γίνεται έτσι ώστε, το ένα άκρο Α μιας διαμέτρου, να έχει ταχύτητα μηδέν ενώ το άλλο Β να έχει ταχύτητα υ. Αρχικά το επίπεδο του νομίσματος είναι οριζόντιο. Το νόμισμα περιστρέφεται γύρω από άξονα οριζόντιο κάθετο στην ΑΒ. Αν το κέντρο του νομίσματος φτάνει σε ύψος h, να βρείτε

i) Πόσες στροφές θα κάνει μέχρι να επανέλθει στο επίπεδο εκτόξευσης και

ii) αν θα έλθει κορώνα ή γράμματα.

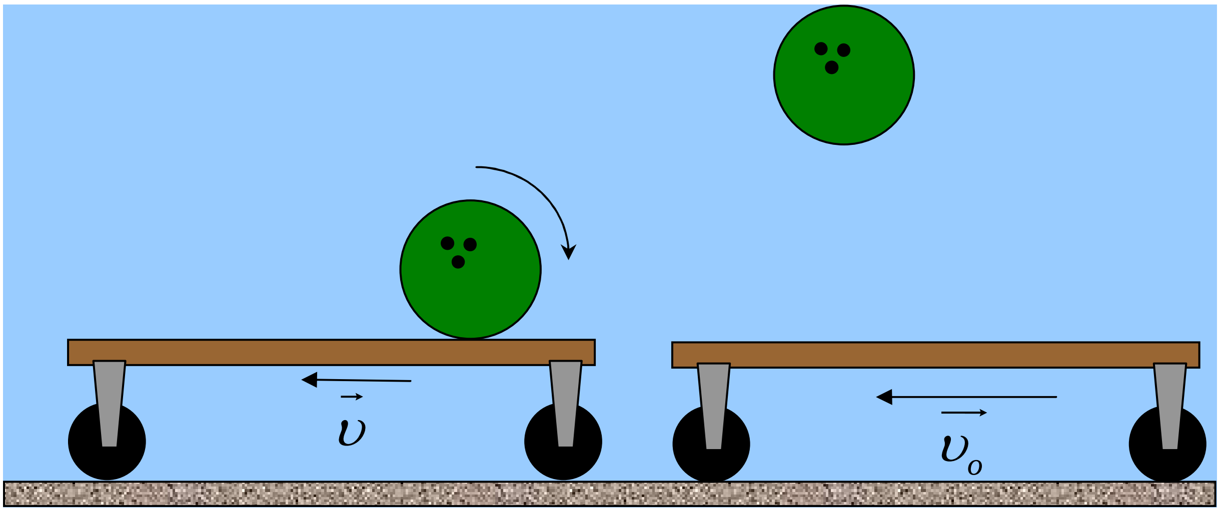
Θεωρείστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Το νόμισμα επανέρχεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εκτόξευσης (παλάμη μας) και δεν αναπηδά. Δεδομένα h ,δ . εφαρμογή h=50cm , δ=4cm

5.22. *Μια μπάλα του bowling πέφτει σε κινούμενο καροτσάκι.*

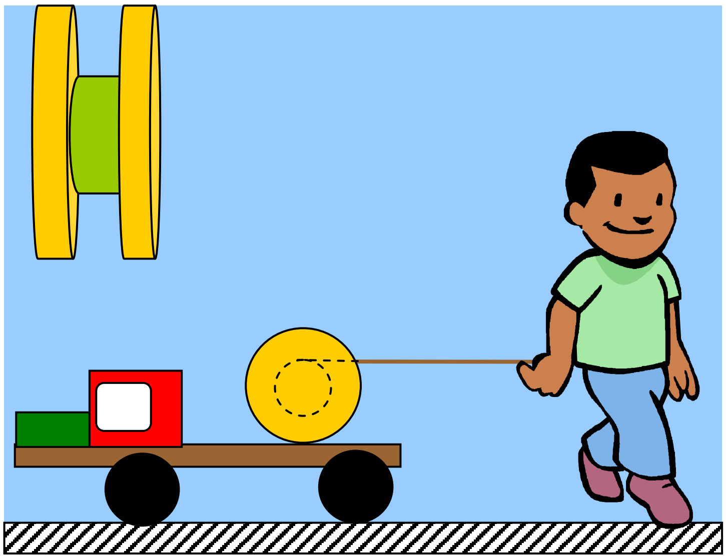
Ένα καροτσάκι έχει μάζα 8 kg και τροχούς με αμελητέα ροπή αδράνειας. Ενώ κινείται με ταχύτητα 9 m/s αφήνουμε μια μπάλα bowling ίδιας μάζας να πέσει επάνω του. Μετά από σύντομες αναπηδήσεις η μπάλα κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο καροτσάκι. Η ακτίνα της μπάλας είναι 0,1 m.

i) Με ποια ταχύτητα κινείται το καροτσάκι τη στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση;

ii) Αν η μπάλα έπεσε από ύψος 0,5 m πόση ενέργεια χάθηκε;



5.23. *Προς ποια κατεύθυνση τα κινηθεί το αυτοκινητάκι;*



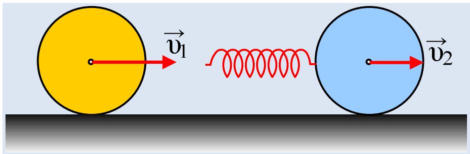
Το γιογιό του πιτσιρίκου αποτελείται από δύο ξύλινους δίσκους ακτίνας R και μάζας m συνολικά και έναν κύλινδρο αμελητέας μάζας με ακτίνα r που είναι κολλημένος με αυτούς ώστε τα κέντρα τους να ανήκουν στον ίδιο άξονα.

Ο μικρός τραβάει το νήμα με σταθερή δύναμη. Το γιογιό δεν ολισθαίνει στο αυτοκινητάκι το οποίο έχει μάζα M.

Διερευνήσατε πως θα κινηθεί το αυτοκινητάκι για διάφορες τιμές του λόγου των ακτίνων.

5.24. Κρούση δύο σφαιρών … μέσω ελατηρίων.

Οι σφαίρες του παρακάτω σχήματος μπορούν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο έχοντας αρχικές ταχύτητες $υ_{ocm1}$=3m/sec και $υ_{ocm2}$=1m/sec .Οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα R=0,2m και την ίδια μάζα m=1Kg.



Η κάθε σφαίρα έχει περασμένη συμμετρικά από το κέντρο της μία οριζόντια αβαρή και άκαμπτη βελόνα μήκους 3R. Στα άκρα της βελόνας που είναι περασμένη στη δεύτερη σφαίρα είναι κολλημένα δύο οριζόντια ελατήρια φυσικού μήκους Lo=0,5m και σταθεράς K=140N/m το καθένα.

A) Να αποδείξετε ότι οι σφαίρες μόλις θα έρθουν σε επαφή.

B) Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της κάθε σφαίρας

Γ) Τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των κέντρων μάζας των δύο σφαιρών.

Δίνεται $I_{cm}=0,4MR^2$.