

Ταλάντωση και Ολική ανάκλαση

Ένα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας $R=\sqrt{3}m$ περιέχει νερό ενώ σε σημείο O που βρίσκεται στην κατακόρυφη διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο της επιφάνειας του υγρού, σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια, βρίσκεται σημειακή φωτεινή πηγή, η οποία στέλνει κωνική δέσμη ακτίνων προς την επιφάνεια του υγρού. Η ακτίνα του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι $r=\frac{4\sqrt{3}}{5}m$ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας μέσα στο νερό έχει εξίσωση:

$$E(y, t) = 1200\sqrt{3}\eta\mu(90\pi \cdot 10^{13}t - 20\pi\sqrt{3} \cdot 10^5y)(S.I.)$$

α) Να υπολογιστούν:

- α₁)** Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό.
- α₂)** Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την δεδομένη ακτινοβολία.
- α₃)** Η κρίσιμη γωνία εξόδου της ακτινοβολίας από νερό προς τον αέρα.

β) Να γραφεί η χρονική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας στο νερό, θεωρώντας ότι τα δύο πεδία είναι συμφασικά.

γ) Να υπολογιστεί το ύψος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού που βρίσκεται η φωτεινή πηγή.

δ) Κάποια στιγμή που θεωρείται ως $t=0$ η φωτεινή πηγή αρχίζει να κινείται από το σημείο $O(y=0)$ κατακόρυφα προς τα πάνω σε διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο K της επιφάνειας του υγρού εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου $T=1,5$ s. Εάν κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης φωτίζεται στιγμιαία ολόκληρη η επιφάνεια του υγρού, να υπολογίσετε:

- δ₁)** το πλάτος A και η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης της φωτεινής πηγής, θεωρώντας ως θετική την φορά προς τα κάτω
- δ₂)** για πόσο χρόνο στη διάρκεια κάθε περιόδου το εμβαδόν του φωτεινού δίσκου είναι μεγαλύτερο από το 81% του εμβαδού της επιφάνειας του υγρού.

Για τον αέρα θεωρήστε δείκτη διάθλασης $n_{\text{αε}}=1$ και ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο κενό $c=3 \cdot 10^8 \text{m/s}$.

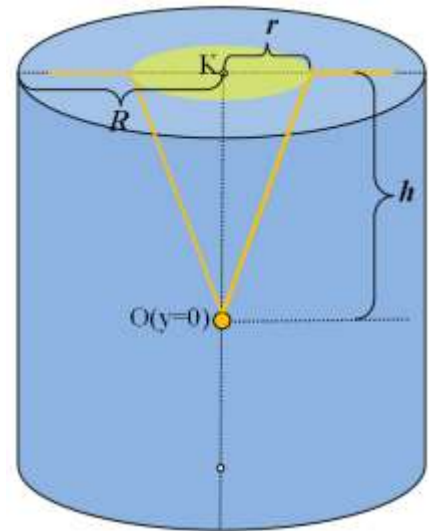
Λύση:

α₁) Συγκρίνοντας της δοθείσα εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου με την αντίστοιχη της θεωρίας

$$E = E_{\text{max}} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$E_{\text{max}} = 1200\sqrt{3} \text{ N/C}$$

$$\omega = 90\pi \cdot 10^{13} \text{ rad/s} \Rightarrow f = 45 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$



$$\frac{2\pi \cdot y}{\lambda} = 20\pi\sqrt{3} \cdot 10^5 y \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{30} \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Οπότε η ταχύτητα διάδοσης στο νερό είναι:

$$u = \lambda \cdot f \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{30} \cdot 10^{-5} \cdot 45 \cdot 10^{13} \rightarrow \boxed{u = 1,5\sqrt{3} \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

α₂) Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την συγκεκριμένη ακτινοβολία είναι

$$n = \frac{c}{u} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5\sqrt{3} \cdot 10^8} \Rightarrow \boxed{n = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

α₃) Η κρίσιμη γωνία εξόδου είναι

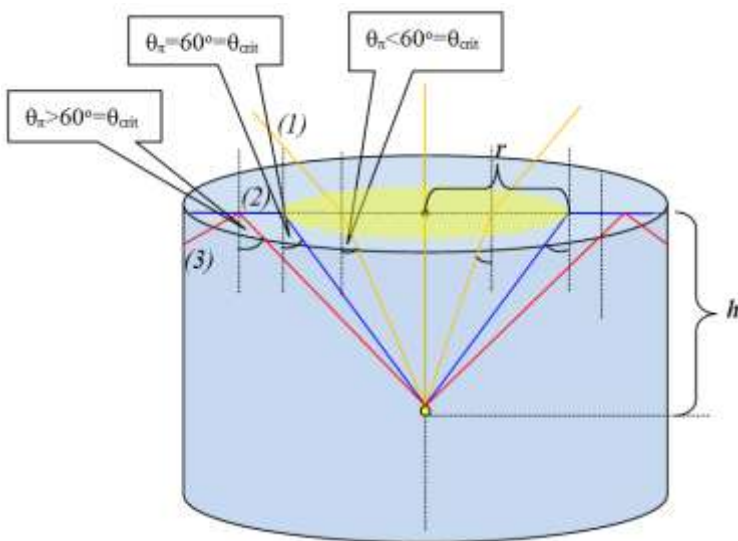
$$\eta\mu\theta_{\text{crit}} = \frac{n_{\text{αερ}}}{n_{\text{νερ}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_{\text{crit}} = 60^\circ}$$

β) Για την ένταση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας έχουμε:

$$B = B_{\text{max}} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{Όπου } \frac{E_{\text{max}}}{B_{\text{max}}} = u \Rightarrow B_{\text{max}} = \frac{E_{\text{max}}}{u} = \frac{1200\sqrt{3}}{1,5\sqrt{3}} \Rightarrow B_{\text{max}} = 800 \text{ T. Άρα:}$$

$$\boxed{B = 800 \cdot \eta\mu(90\pi \cdot 10^{13}t - 20\pi\sqrt{3} \cdot 10y)(\text{S.I.})}$$



γ) Μία ακτίνα, όπως η (1) η οποία προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα υπό γωνία μικρότερη από 60° , διαθλάται και συνεχίζει την διάδοσή της στον αέρα. Μία ακτίνα, όπως η (2) η οποία προσπίπτει υπό γωνία 60° , κινείται παράλληλα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Οι ακτίνες οι οποίες προσπίπτουν υπό γωνία μεγαλύτερη από 60° , όπως η (3), δεν διαθλώνται, αλλά παθαίνουν ολική εσωτερική ανάκλαση. Έτσι, οι ακτίνες που πέφτουν στη

διαχωριστική επιφάνεια υπό γωνία 60° καθορίζουν την περίμετρο του φωτεινού δίσκου ακτίνας r που σχηματίζεται στην επιφάνεια του υγρού.

Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα:

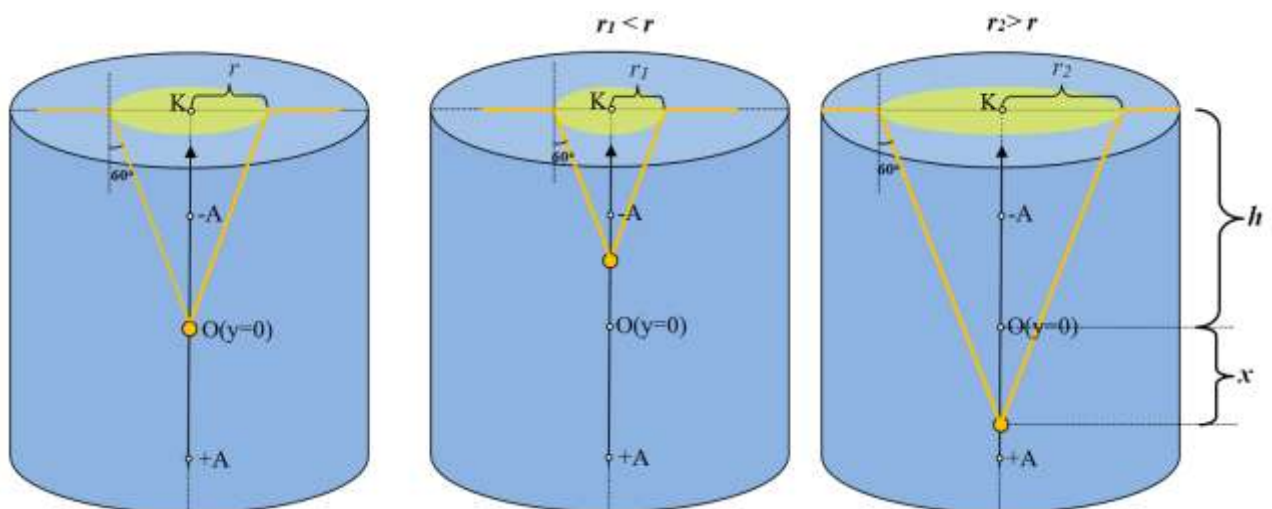
$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{r^2}{r^2 + h^2} \Rightarrow$$

$$4r^2 = 3r^2 + 3h^2 \Rightarrow h = \frac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = 0,8m}$$

δ₁) Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα όρια του φωτεινού δίσκου που σχηματίζεται στην επιφάνεια του υγρού καθορίζεται από εκείνες τις ακτίνες που φτάνουν στην διαχωριστική επιφάνεια νερού-υγρού υπό γωνία ίση με την κρίσιμη. Όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα, εάν η φωτεινή πηγή αρχίζει να κινείται προς κατακόρυφα προς τα πάνω, πλησιάζοντας την πάνω ακραία θέση ταλάντωσής της, μειώνεται η απόσταση από το σημείο Κ των φωτεινών ακτίνων που φτάνουν στην επιφάνεια υπό γωνία 60° , με αποτέλεσμα να μειώνεται η ακτίνα του φωτεινού δίσκου ($r_1 < r$).

Ενώ, όταν η φωτεινή πηγή κινείται προς κατακόρυφα προς τα κάτω, κινούμενη προς την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής της, αυξάνεται η απόσταση από το σημείο Κ των φωτεινών ακτίνων που φτάνουν στην επιφάνεια υπό γωνία 60° , με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ακτίνα του φωτεινού δίσκου. Επομένως, η μόνη περίπτωση να φωτιστεί στιγμιαία ολόκληρη η επιφάνεια του υγρού, είναι να βρεθεί η φωτεινή πηγή στην κάτω ακραία θέση ταλάντωσής της ($r_2 > r$).

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{R}{d'} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{R^2}{R^2 + h'^2} \Rightarrow h' = 1m$$



Όμως:

$$h' = h + A \Rightarrow \boxed{A = 0,2m}$$

Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της πηγής είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{3} \text{ rad/s}$$

Την $t=0$ η πηγή βρίσκεται διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα πάνω, δηλαδή με $u < 0$, οπότε η ταλάντωσή της έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \pi$ rad. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0,2\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}t + \pi\right) (S.I.)}$$

δ2) Θέλουμε:

$$E_{\text{φωτ.δίσκου}} > \frac{81}{100} E_{\text{επιφάνειας υγρού}} \Rightarrow \pi r_2^2 > \frac{81}{100} \pi R^2 \Rightarrow r_2^2 > \frac{81}{100} R^2$$

Όταν η φωτεινή πηγή διέρχεται από την θέση ισορροπίας της (σημείο O), η ακτίνα του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι $r = \frac{4\sqrt{3}}{5}m \approx 1,39m$, ενώ όταν βρίσκεται σε θέσεις του άξονα ταλάντωσης πάνω από αυτήν, η ακτίνα του φωτεινού δίσκου θα είναι μικρότερη ($r_1 < r$).

Επομένως, η απαίτηση $r_2 > 0,9R$ θα πληρείται για κάποιες θέσεις του άξονα ταλάντωσης που βρίσκονται κάτω από την θέση ισορροπίας O.

Για μία θέση της φωτεινής πηγής με απομάκρυνση x από την Θ.Ι. έχουμε:

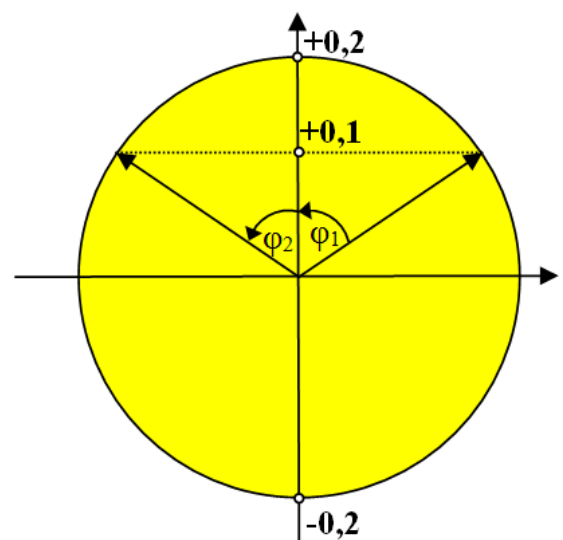
$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{r_2}{d'} = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + h'^2}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{r_2^2}{r_2^2 + h'^2} \Rightarrow r_2^2 = 3h'^2$$

Άρα:

$$3h'^2 > \frac{81}{100} R^2 \Rightarrow (h+x)^2 > \frac{27}{100} R^2 \Rightarrow h+x > 0,3\sqrt{3}R \Rightarrow h+x > 0,9 \Rightarrow x > 0,1m$$

Αυτό σημαίνει ότι για το χρονικό διάστημα που το σώμα κινείται από την θέση $x=+0,1m$ μέχρι την κάτω ακραία θέση ταλάντωσής του ($x=+0,2m$) και στην συνέχεια μέχρι να βρεθεί πάλι ανερχόμενο στην $x=+0,1m$, το εμβαδόν του φωτεινού δίσκου στην επιφάνεια του υγρού είναι μεγαλύτερο από το 81% της επιφάνειας του υγρού. Με την βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος έχουμε:

$$\text{συν}\varphi_1 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$



$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \text{ οπότε } \varphi_{\text{ολ}} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Άρα:

$$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{3} = \frac{1,5}{3} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 0,5 \text{ s}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους,...

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος