# Ποια μπορεί να είναι η κίνηση μετά την κρούση;

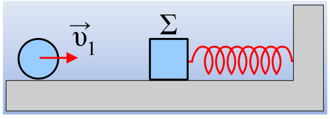
*ή*

*Η επιτάχυνση και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας.*

Ένα κινούμενο σώμα, συγκρούεται κάποια στιγμή με ένα σώμα Σ, που είναι δεμένο σε ελατήριο. Τι κίνηση θα εκτελέσει μετά την κρούση το σώμα Σ; Τι ακριβώς σημαίνει ότι έχει κάποια στιγμή επιτάχυνση και πώς αυτή συνδέεται με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του;

Παρακάτω ας δούμε μερικές περιπτώσεις

**Παράδειγμα 1ο:**




Ένα σώμα Σ μάζας M=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=100N/m. Μια μικρή σφαίρα, μάζας m=0,2kg, η οποία κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$=15m/s, με διεύθυνση αυτή του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την κρούση.

ii) Τη στιγμή που η ταχύτητα του Σ γίνεται για πρώτη φορά v=4m/s, να βρεθούν:

α) Η επιτάχυνση του σώματος Σ.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητά του.

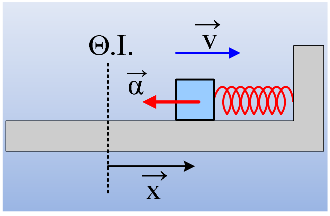
**Απάντηση:**

i) Η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ μετά την κεντρική και ελαστική κρούση έχει μέτρο:

$$\upsilon_o = \frac{2m}{M+m}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 0,2}{1+0,2}15m/s = 5m/s$$

Η ταχύτητα αυτή είναι και η μέγιστη ταχύτητα της ΑΑΤ που θα εκτελέσει το σώμα Σ, μετά την κρούση.

ii) Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης για το σώμα Σ παίρνουμε:




$$K+U=E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_o^2 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}(\upsilon_o^2 - v^2)} = \sqrt{\frac{1}{100}(5^2-4^2)}m = 0,3m$$

α) Αλλά τότε η για την επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha = -\omega^2\cdot x = -\frac{D}{M}x = -\frac{k}{M}x = -\frac{100}{1}0,3m/s^2 = -30m/s^2$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα αριστερά (πήραμε x>0, συνεπώς έστω και αν δεν το δηλώσαμε, θεωρήσαμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική).

β) Η παραπάνω επιτάχυνση, το μόνο που κάνει είναι να μειώνει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, με αποτέλεσμα να επιβραδύνεται και μετά από λίγο να σταματήσει στην ακραία θέση της ταλάντωσης του, συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του είναι ίσος με την επιτάχυνση:

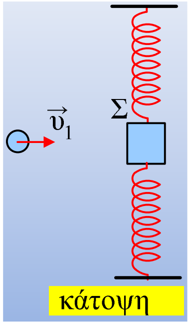
$$\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = -30 m/s^2$$

Όπου το (-) εκφράζει αυτήν την μείωση του μέτρου της ταχύτητας.

Δηλαδή αν είχαμε πάρει την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική, τι θα συνέβαινε;

Τότε θα υπολογίζαμε α=+30m/s$^2$, αλλά και πάλι θα είχαμε $\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = -30 m/s^2$.

***Παράδειγμα 2$^o$:***




Ένα σώμα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας M=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στα άκρα δύο όμοιων οριζοντίων ελατηρίων σταθεράς k=50N/m, τα οποία έχουν το φυσικό μήκος τους $\ell_o$=0,5m, όπως στο σχήμα. Μια μικρή σφαίρα, μάζας m=0,2kg, η οποία κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$=15m/s, με διεύθυνση κάθετη στον κοινό άξονα των ελατηρίων, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την κρούση.

ii) Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα εκτελέσει γραμμική ταλάντωση, της οποίας να υπολογίστε το πλάτος.

iii) Να εξεταστεί, αν η παραπάνω ταλάντωση είναι ή όχι ΑΑΤ.

iv) Τη στιγμή που η ταχύτητα του Σ γίνεται για πρώτη φορά v=4m/s, να βρεθούν:

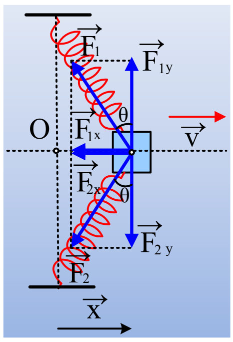
α) Η επιτάχυνση του σώματος Σ.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητά του.

**Απάντηση:**

i) Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε:

$$\upsilon_o = \frac{2m}{M+m}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 0{,}2}{1+0{,}2} 15 m/s = 5 m/s$$




ii) Το σώμα, με την ταχύτητα που απέκτησε μετά την κρούση, θα κινηθεί προς τα δεξιά και έστω μετά από λίγο στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, απέχοντας κατά x, από την θέση της κρούσης Ο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $F_1$ και $F_2$ από τα δυο ελατήρια με μέτρα $F_1=F_2=k\cdot\Delta\ell=k\cdot(\ell-\ell_0)$.

Αλλά αναλύοντάς τις σε δυο κάθετους άξονες x και y, θα έχουμε:

$$\Sigma F_y=F_{1y}-F_{2y}=F_1\cdot συνθ-F_2\cdot συνθ=0$$

ενώ

$$\Sigma F_x=F_{1x}+F_{2x}=2F_1\cdot ημθ=2\cdot k\cdot\Delta\ell\cdot ημθ$$

Παρατηρούμε ότι το σώμα έχει ταχύτητα στην διεύθυνση x, ενώ δέχεται δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης, συνεπώς θα κινηθεί ευθύγραμμα, εκτελώντας επιβραδυνόμενη κίνηση, μέχρι την θέση που θα μηδενιστεί η ταχύτητά του. Στη συνέχεια θα επιταχυνθεί στην ίδια διεύθυνση αποκτώντας ταχύτητα προς τα αριστερά. Πού θα σταματήσει;

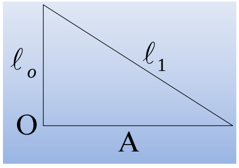
Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα -δυο ελατήρια, (αφού οι δυνάμεις είναι συντηρητικές), ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και τη θέση που μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του Σ, παίρνουμε:

$$K_{αρ}+U_{αρ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_o^2+0=2\cdot\frac{1}{2}k\cdot(\Delta\ell_1)^2 \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1=\upsilon_o\sqrt{\frac{M}{2k}}=5\sqrt{\frac{1}{100}}m=0{,}5m$$

Στη συνέχεια το σώμα θα επιταχυνθεί στην ίδια ευθεία προς τα αριστερά, φτάνοντας μέχρι τη συμμετρική, ως προς το Ο, θέση και η κίνηση θα επαναλαμβάνεται.




Αλλά στη θέση αυτή, κάθε ελατήριο έχει μήκος:

$$\ell_1=\ell_o+\Delta\ell=0{,}5m+0{,}5m=1m$$

και από το πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$\ell_o^2+A^2=\ell_1^2 \rightarrow$$

$$A=\sqrt{\ell_1^2-\ell_o^2}=\sqrt{1^2-0{,}5^2}\,m=0{,}5\sqrt{3}m$$

Θα έχουμε δηλαδή μια γραμμική ταλάντωση του σώματος με πλάτος Α= $0{,}5\sqrt{3}m$, γύρω από την θέση ισορροπίας Ο.

iii) Έστω η θέση που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και έστω η κατεύθυνση προς τα δεξιά θετική. Τότε για τη συνισταμένη δύναμη στην τυχαία αυτή θέση, μπορούμε να γράψουμε:

$$ΣF=ΣF_x=-F_{1x}-F_{2x}=-2F_1\cdot ημθ=-2\cdot k\cdot\Delta\ell\cdot ημθ\rightarrow$$

$$\Sigma F=-2k(\ell-\ell_o)\cdot\frac{x}{\ell}=-2k\left(1-\frac{\ell_o}{\ell}\right)\cdot x=-2k\left(1-\frac{\ell_o}{\sqrt{\ell_o+x^2}}\right)\cdot x\,.$$

Βλέποντας την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη δεν είναι ανάλογη της απομάκρυνσης x (υπάρχει και το $x^2$ στην υπόρριζη ποσότητα μέσα στην παρένθεση), πράγμα που σημαίνει ότι η ταλάντωση αυτή, **δεν** είναι ΑΑΤ.

iv) Εφαρμόζουμε ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ανάμεσα στη θέση αμέσως μετά την κρούση και στη θέση με απομάκρυνση x, όπου το σώμα έχει ταχύτητα v και παίρνουμε:

$$K_{αρ}+U_{αρ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_o^2+0=\frac{1}{2}Mv^2+2\cdot\frac{1}{2}k\cdot(\Delta\ell)^2 \rightarrow$$

$$\Delta\ell=\sqrt{\frac{M(\upsilon_o^2-v^2)}{2k}}=\sqrt{\frac{1(5^2-4^2)}{100}}m=0{,}3m$$

Αλλά τότε το μήκος του κάθε ελατηρίου είναι $\ell=\ell_o+\Delta\ell=0{,}5m+0{,}3m=0{,}8m$, ενώ με εφαρμογή ξανά του πυθαγορείου θεωρήματος παίρνουμε:

$$\ell_o^2 + x^2 = \ell^2 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{\ell^2 - \ell_o^2} = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}5^2}\,m \approx 0{,}62m$$

α) Οπότε από το 2$^o$ νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F = M \cdot \alpha \rightarrow$$

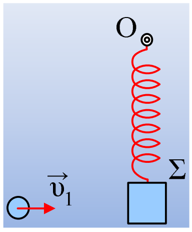
$$a = -\frac{2k\left(1-\frac{\ell_o}{\ell}\right)\cdot x}{M} \approx -\frac{2\cdot 50\left(1-\frac{0{,}5}{0{,}8}\right)\cdot 0{,}62}{1} m/s^2 \approx -23m/s^2$$

β) Και με την ίδια λογική, όπως στην προηγούμενη εφαρμογή:

$$\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} \approx -23m/s^2$$

***Παράδειγμα 3$^o$:***

Ένα σώμα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο, μάζας M=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=50N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του $\ell_o$=0,5m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε καρφί στο σημείο O, όπως στο σχήμα. Μια μικρή σφαίρα, μάζας m=0,2kg, η οποία κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1$=15m/s, με διεύθυνση κάθετη στον άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ.




i) Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την κρούση.

ii) Τη στιγμή που η ταχύτητα του Σ γίνεται για πρώτη φορά v=4m/s, να βρεθούν:

α) Η επιτάχυνση του σώματος Σ.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητά του.

iii) Σε μια στιγμή η ταχύτητα του σώματος γίνεται ελάχιστη $v_1$=2,2m/s. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

α) το μήκος του ελατηρίου.

β) η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σώματος Σ.

Δίνεται ότι η ακτίνα καμπυλότητας μιας καμπύλης, ορίζεται ίση με την ακτίνα ενός κύκλου, ο οποίος στην συγκεκριμένη θέση προσεγγίζει ικανοποιητικά την καμπύλη μας.

***Απάντηση:***

i) Όπως και στις προηγούμενες κρούσεις βρίσκουμε:

$$\upsilon_o = \frac{2m}{M+m}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 0{,}2}{1+0{,}2}15m/s = 5m/s$$

ii) Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα-ελατήριο, αμέσως μετά την κρούση και στη θέση που το σώμα έχει ταχύτητα v, παίρνουμε:

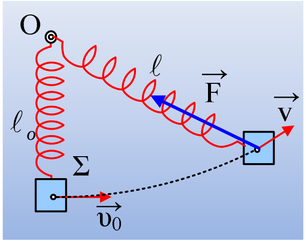
$$K_\alpha + U_\alpha = K_\tau + U_\tau \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_o^2 + 0 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}(\upsilon_o^2 - v^2)} = \sqrt{\frac{1}{100}(5^2 - 4^2)}m = 0,3m$$

Όπου x η επιμήκυνση του ελατηρίου. Συνεπώς στη θέση αυτή το ελατήριο έχει μήκος:

$$\ell = \ell_o + x = 0,8m$$

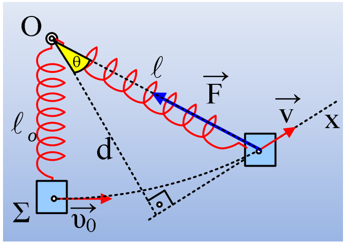



Βέβαια τώρα, με την κίνηση του σώματος Σ, το ελατήριο αρχίζει να επιμηκύνεται, αλλά η δύναμη που ασκεί στο σώμα κατευθύνεται στο σταθερό σημείο Ο, το άλλο άκρο του ελατηρίου. Συνεπώς η τροχιά του σώματος δεν θα είναι πλέον ευθύγραμμη, αλλά καμπυλόγραμμη. Έτσι η κατάσταση είναι όπως αυτή που περιγράφεται στο διπλανό σχήμα.

α) Έτσι η επιτάχυνση του σώματος Σ στην θέση αυτή έχει την κατεύθυνση της δύναμης **F** και μέτρο:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{kx}{M} = \frac{50 \cdot 0,3}{1}m/s^2 = 15m/s^2$$

β) Το ερώτημα που ανακύπτει είναι ποια η διεύθυνση της ταχύτητας v και πώς συνδέεται με την διεύθυνση της επιτάχυνσης;

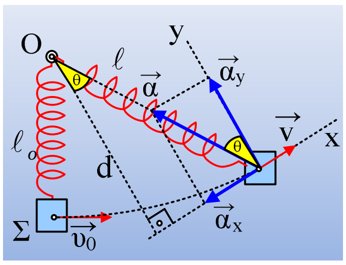



Η δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο, αλλάζει διεύθυνση, αλλά κατευθύνεται πάντα προς ένα σταθερό σημείο Ο, είναι δηλαδή μια κεντρική δύναμη. Συνεπώς η στροφορμή του σώματος ως προς το Ο, θα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται καμιά ροπή στο σώμα Σ ως προς το Ο:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_\tau \rightarrow$$

$$M\upsilon_o\ell_o = Mvd \rightarrow d = \frac{\upsilon_o\ell_o}{v} = \frac{5 \cdot 0,5}{4}m = 0,625m$$

Όπου d η απόσταση του σημείου Ο από τον φορέα της ταχύτητας, όπως στο παραπάνω σχήμα.

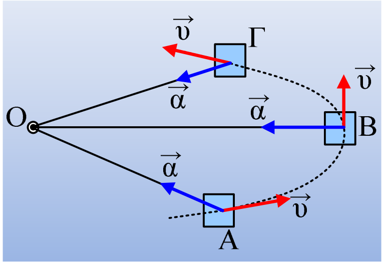



Αναλύουμε τώρα την επιτάχυνση του σώματος σε δυο συνιστώσες, μια στη διεύθυνση x και μια σε κάθετη διεύθυνση y, όπως στο διπλανό σχήμα. Η συνιστώσα $\alpha_y$ είναι κάθετη με αποτέλεσμα να μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας (κεντρομόλος επιτάχυνση), ενώ η συνιστώσα $\alpha_x$ μειώνει το μέτρο της ταχύτητας, αφού έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα (δες επιβραδυνόμενη κίνηση). Συνεπώς:

$$\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = -|a_x| = -a \cdot \eta\mu\vartheta = -a\frac{\sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell} \rightarrow$$

$$\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = -a\frac{\sqrt{\ell^2 - d^2}}{\ell} = -15\frac{\sqrt{0,8^2 - 0,625^2}}{0,8}m/s^2 \approx -9,4m/s^2$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί το σώμα σε τρεις θέσεις Α,Β και Γ, ενώ έχει αντικατασταθεί το ελατήριο με γραμμή, για να είναι καθαρότερη η κατάσταση. Στη θέση Β η ταχύτητα είναι κάθετη στην ΟΒ. Με βάση όσα διατυπώθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, στη θέση Α, η επιτάχυνση δίνει συνιστώσα αντίθετη της ταχύτητας, με αποτέλεσμα να μειώνεται το μέτρο της ταχύτητας. Με την ίδια συλλογιστική βρίσκουμε ότι στη θέση Γ, θα πάρουμε συνιστώσα επιτάχυνσης στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα, οπότε το μέτρο της ταχύτητας θα αυξάνεται. Αλλά τότε η ταχύτητα θα μειώνεται από τη θέση Α στην Β, ενώ θα αυξάνεται κατά την κίνηση από το Β στο Γ. Συνεπώς στο σημείο Β που η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, θα έχουμε μια θέση με ελάχιστο μέτρο ταχύτητας $v_1$.




Εφαρμόζουμε ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα σώμα-ελατήριο, αμέσως μετά την κρούση και στη θέση που το σώμα έχει ταχύτητα $v_1$, παίρνουμε:

$$K_\alpha + U_\alpha = K_\tau + U_\tau \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_o^2 + 0 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{M}{k}(\upsilon_o^2 - v_1^2)} = \sqrt{\frac{1}{100}(5^2 - 2{,}2^2)}m = 0{,}45m$$

Αλλά τότε το ελατήριο έχει μήκος $\ell_1 = \ell_o + x_1 = 0{,}95m$ και το σώμα θα έχει επιτάχυνση μέτρου:

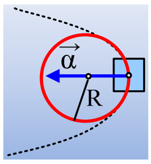
$$a_B = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{M} = \frac{kx_1}{M} = \frac{50 \cdot 0{,}45}{1} m/s^2 = 22{,}5 m/s^2$$

με κατεύθυνση προς το σημείο Ο, η οποία αλλάζει μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας, είναι δηλαδή κεντρομόλος επιτάχυνση.

Αλλά από τον νόμο της κεντρομόλου έχουμε:

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow R = \frac{v_1^2}{a_B} = \frac{2{,}2^2}{22{,}5} m \approx 0{,}22m$$

Δηλαδή η ακτίνα του κύκλου, στον οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κινείται το σώμα στη θέση αυτή, είναι ίση με 0,22m. Ή ισοδύναμα, η καμπύλη στην παραπάνω θέση, μπορεί να προσεγγιστεί με έναν κύκλο ακτίνας R=0,22m.




**Σχόλια:**

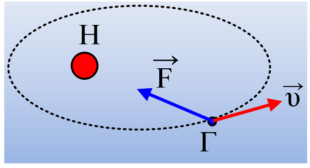
1) Πόση είναι η αντίστοιχη ακτίνα καμπυλότητας στην αρχική θέση, αμέσως μετά την κρούση; Προφανώς το ελατήριο έχοντας το φυσικό μήκος του, δεν ασκεί δύναμη, άρα δεν έχουμε επιτάχυνση και η κίνηση δεν είναι καμπυλόγραμμη, αλλά ευθύγραμμη. Αλλά ένα ευθύγραμμο τμήμα προσεγγίζεται μόνο, από ένα κύκλο με άπειρη ακτίνα!

   Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις θα λέγαμε:

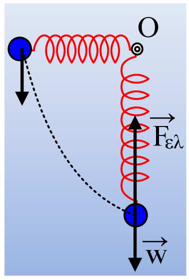
$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \to R = \frac{\upsilon_o^2}{a}$$

Και αφού α→0, τότε R→∞.

2) Στην αρχική λοιπόν θέση, η κίνηση είναι ευθύγραμμη και η τροχιά του σώματος δεν παρουσιάζει καμπυλότητα. Αυτό διαφοροποιεί την παραπάνω κίνηση, για παράδειγμα από την κίνηση ενός δορυφόρου σε ελλειπτική τροχιά. Πράγματι η Γη διαγράφει ελλειπτική τροχιά, όπου στην μία εστία της έλλειψης βρίσκεται ο Ήλιος. Αλλά εδώ δεν υπάρχει κανένα σημείο στο οποίο να μην εμφανίζεται καμπυλότητα της τροχιάς, αφού σε όλες τις θέσεις ασκείται δύναμη παγκόσμιας έλξης, συνεπώς υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση.




3) Ας κρατήσουμε το συμπέρασμα ότι, άλλο ακτίνα καμπυλότητας και άλλο μήκος ελατηρίου, που προέκυψε στο ερώτημα iii) του τελευταίου παραδείγματος. Έτσι στην περίπτωση που το σώμα αφήνεται να κινηθεί, σε κατακόρυφο επίπεδο, από οριζόντια θέση, όπως στο διπλανό σχήμα, στο χαμηλότερο σημείο, η ακτίνα καμπυλότητας, δεν είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου, μια λύση που κατά κόρον συναντάμε σε βιβλία.




**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

*Διονύσης Μάργαρης*