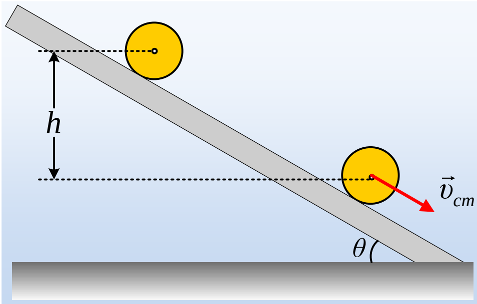
Δίνοντας τρεις απαντήσεις, σε γνωστή ερώτηση…..



Ένας τροχός αφήνεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, οπότε κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και μετά από λίγο έχει κατέλθει κατά h, έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm} .

i) Η επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού έχει μέτρο:

α) $\alpha_{cm} < g\cdot\eta\mu\theta$, β) $\alpha_{cm} = g\cdot\eta\mu\theta$, γ) $\alpha_{cm} > g\cdot\eta\mu\theta$

ii) Η ταχύτητα υ_{cm} έχει μέτρο:

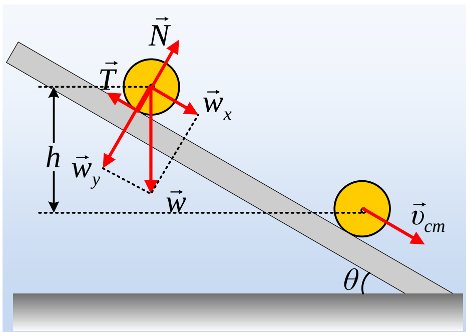
α) $\upsilon_{cm} < \sqrt{2gh}$, β) $\upsilon_{cm} = \sqrt{2gh}$, γ) $\upsilon_{cm} > \sqrt{2gh}$.

Να δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού γύρω από τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

1) *Πρώτη εκδοχή:*



i) Με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow Mg\cdot\eta\mu\theta - T = M\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Και } \Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = \tfrac{1}{2} MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{a_{cm}=a_{\gamma\omega\nu}R} T = \frac{1}{2}Ma_{cm} \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$Mg\cdot\eta\mu\theta = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3}g\cdot\eta\mu\theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ παίρνουμε:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Αλλά $\upsilon_{cm} = \omega\cdot R$ οπότε,

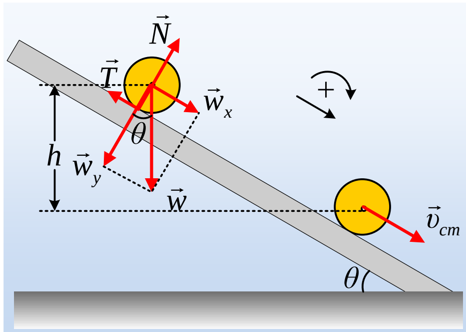
$$Mgh = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} < \sqrt{2gh}$$

Σωστή η α) πρόταση.

2) Δεύτερη εκδοχή.

i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, ο οποίος αφού κυλίεται, πρέπει να δέχεται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω, η ροπή της οποίας θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και συνεπώς την περιστροφή του. Εξάλλου, η γωνία που σχηματίζει το βάρος με την κάθετη προς το επίπεδο συνιστώσα w_x είναι ίση με την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).



Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική και την στροφική κίνηση του τροχού, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow Mg\cdot\eta\mu\theta - T = M\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$Και\ \Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T = \frac{1}{2}Ma_{cm} \,(2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) θα πάρουμε:

$$Mg\cdot\eta\mu\theta = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3}g\cdot\eta\mu\theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Κατά την κίνηση του τροχού, η στατική τριβή δεν παράγει έργο, αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Αλλά τότε, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, δύναμη συντηρητική, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Ορίζοντας λοιπόν ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την χαμηλότερη θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

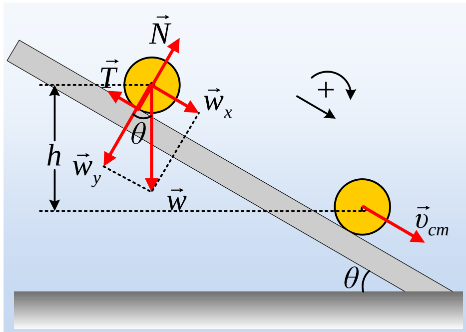
Αλλά $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$ οπότε, $Mgh = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 \rightarrow$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} < \sqrt{2gh}$$

Σωστή η α) πρόταση.

3) Τρίτη εκδοχή.

i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, ο οποίος αφού κυλίεται πρέπει να δέχεται στατική τριβή με φορά προς τα πάνω, η ροπή της οποίας, θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και συνεπώς την περιστροφή του. Εξάλλου η γωνία που σχηματίζει το βάρος με την κάθετη προς το επίπεδο συνιστώσα w_x είναι ίση με την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου (γωνίες με κάθετες πλευρές).



Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση του τροχού, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M\cdot \alpha_{cm} \rightarrow Mg\cdot \eta\mu\theta - T = M\cdot \alpha_{cm}$$

$$\alpha_{cm} = g\cdot \eta\mu\theta - \frac{T}{M} < g\cdot \eta\mu\theta$$

Σωστή η α) πρόταση.

ii) Αν ο τροχός εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση (λείο επίπεδο), η μείωση της δυναμικής ενέργειας του τροχού θα εμφανιζόταν ως αύξηση της κινητικής ενέργειάς του και ορίζοντας, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την χαμηλότερη θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, θα είχαμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{2gh}$$

Όμως στην περίπτωσή μας εμφανίζεται στατική τριβή, οπότε ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση και ένα μέρος της αρχικής δυναμικής ενέργειας θα εμφανιστεί ως κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής. Αλλά τότε η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης θα ήταν μικρότερη και κατά συνέπεια και η ταχύτητα του κέντρου μάζας, θα ήταν μικρότερη από $\sqrt{2gh}$.

Σωστή η α) πρόταση.

Σχόλια:

- Η πρώτη εκδοχή, είναι αυτή που συνήθως γράφουν οι μαθητές μας. Μια στεγνή παράθεση μαθηματικών σχέσεων, χωρίς καμιά εξήγηση.
- Η ίδια λύση είναι η δεύτερη εκδοχή, «ντυμένη» με τις απαραίτητες επεξηγήσεις που καθιστούν την «απάντηση» μια ουσιαστική απάντηση, η οποία διεκδικεί το σύνολο των μορίων, σε οποιαδήποτε βαθμολόγηση.
- Η τρίτη εκδοχή, είναι η απάντηση κάποιου, ο οποίος δεν σκύβει το κεφάλι και αρχίζει να γράφει κάτι

που το ξέρει από παλιά… Σκέφτεται τι του ζητάνε, βλέπει ότι δεν είναι ανάγκη να κάνει πράξεις και να υπολογίσει τα μεγέθη που αναφέρονται και χρησιμοποιώντας τη θεωρία που γνωρίζει, οδηγείται σε απάντηση, στο συντομότερο χρόνο, χωρίς να αφήνει κενά δικαιολόγησης.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης