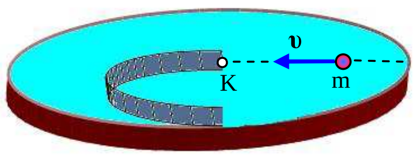
Αρχές διατήρησης στροφορμής , ορμής , ενέργειας και μια απλή αρμονική ταλάντωση



Ένας δίσκος μάζας M = 2 kg και ακτίνας R =0,1m μπορεί να στρέφεται ως προς κατακόρυφο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Μια κατακόρυφη επιφάνεια που έχει σχήμα ημικυκλίου ακτίνας r = R/2 είναι στερεωμένη πάνω στον δίσκο όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου K το κέντρο του δίσκου.

Αρχικά το σύστημα ηρεμεί.

Μια μικρή σφαίρα αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με την ακτίνα του δίσκου , μάζας m =M/2 κινείται χωρίς να περιστρέφεται στη διεύθυνση μιας διαμέτρου του δίσκου, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 8\sqrt{2}$ m/s , και φτάνοντας στο σημείο K , μπαίνει εφαπτόμενα στον κυκλικό οδηγό που ορίζει η κατακόρυφη ημικυκλική επιφάνεια.

Α. Να υπολογίσετε τις τιμές που έχουν τα παρακάτω μεγέθη , τη χρονική στιγμή που βγαίνει η σφαίρα από τον κυκλικό οδηγό και εγκαταλείπει το δίσκο κατά τη διεύθυνση της κοινής εφαπτομένης στο απέναντι από το K σημείο της περιφέρειάς του:

Α1. το μέτρο V της ταχύτητας της σφαίρας

Α2. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

Β. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας από τη στιγμή που μπαίνει στον κυκλικό οδηγό μέχρι τη στιγμή που βγαίνει.

Γ. Η σφαίρα μετά που θα βγει από τον κυκλικό οδηγό, συνεχίζει να κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται τη χρονική στιγμή t = 0 , μετωπικά πλαστικά, με σώμα Σ μάζας m_1 που κινείται με αντίθετη ταχύτητα , δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητο. Αν το συσσωμάτωμα που προκύπτει , εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με απομάκρυνση της μορφής $x = 0{,}8\sqrt{3}\cdot ημ\left(5\sqrt{2}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ SI να υπολογίσετε:

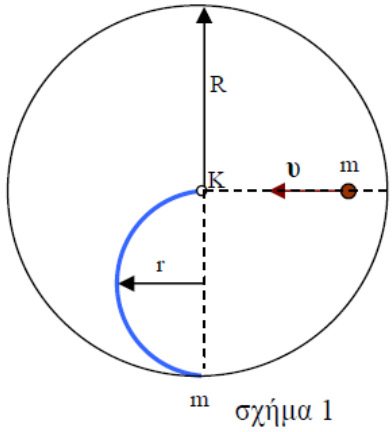
Γ1. Τη σταθερά k του ελατηρίου.

Γ2. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελούσε το σώμα Σ πριν την κρούση.

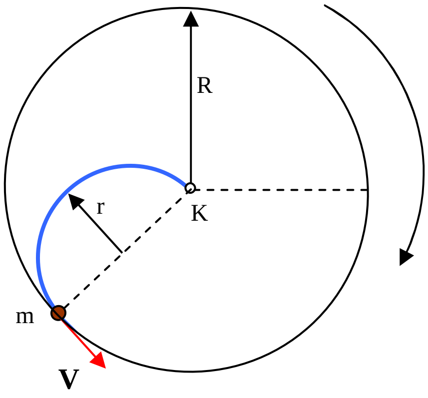
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I_{cm} = ½MR^2$, η μάζα του κυκλικού οδηγού αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του δίσκου, η κρούση γίνεται ακαριαία και ότι κατά της κινήσεις των σωμάτων δεν υπάρχουν τριβές.

Απάντηση

Α1. Κατά την κίνηση της σφαίρας μέσα στον κυκλικό οδηγό οι εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των σωμάτων και η δύναμη από τον άξονα περιστροφής που δεν προκαλούν ροπές ως προς τον ίδιο άξονα.
Έτσι η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.



σχήμα 1



σχήμα 2

Όμως αρχικά ο δίσκος ηρεμεί, άρα δεν έχει στροφορμή.

Η σφαίρα αρχικά κατευθύνεται προς το Κ όπως φαίνεται στο σχήμα 1 , άρα η «ροπή της ορμής » της ως προς τον άξονα περιστροφής του συστήματος είναι

$$L = m \cdot υ \cdot 0 = 0.$$

Κατά συνέπεια η αρχική στροφορμή της είναι ίση με μηδέν.

Έστω $\vec{V}$ η ταχύτητα που έχει η σφαίρα την στιγμή που βγαίνει από τον κυκλικό οδηγό – σχήμα 2.

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής θα έχουμε

$$\vec{L}_Σ + \vec{L}_Δ = \vec{0} \text{ άρα}$$

$$mVR - \frac{1}{2}MR^2ω = 0 \text{ ή } \quad ω = 2\frac{m}{M}\cdot\frac{V}{R} \text{ ή } \quad ω = 2\frac{m}{2m}\cdot\frac{V}{R} \text{ ή } \quad ω = \frac{V}{R} \quad (1)$$

Με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε τώρα ότι

$$\frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2ω^2$$

$$\frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mR^2ω^2$$

$$\text{ή } υ^2 = V^2 + R^2ω^2 \quad \text{και με βάση την (1)}$$

$$υ^2 = V^2 + R^2\frac{V^2}{R^2} \text{ ή } υ^2 = 2V^2 \text{ ή } V = \frac{υ}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{m}{s}$$

$$\text{άρα } V = 8\frac{m}{s} \quad (2)$$

Α2. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι ω = 80 rad/s

Β. Η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας θα είναι

$\Delta\vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_K = \vec{L}_1 - \vec{0} = \vec{L}_1$ άρα ΔL = mVR και με βάση τη (2) ΔL =0,8kgm²/s , διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του δίσκου και φορά προς τα επάνω.

Γ1. Αφού το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση π/2 , αμέσως μετά την κρούση, ξεκινά από ακραία θέση.

Άρα ως αποτέλεσμα της κρούσης , το συσσωμάτωμα ηρεμεί στιγμιαία.

Έτσι αν ονομάσουμε $\vec{u}$ την ταχύτητα του σώματος Σ ακριβώς πριν την κρούση, από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_\Sigma = \vec{0} \text{ ή } mV - m_1 \cdot u = 0 \quad (3)$$

Όμως, το σώμα Σ κινείται ακριβώς πριν την κρούση , με αντίθετη ταχύτητα από τη σφαίρα άρα , θα είναι V = u και από την (3) $m_1 = m$.

Η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = (m_1+m)\cdot\omega^2 = 2m\omega^2 = 2\cdot 1\cdot\left(5\sqrt{2}\right)^2$ N/m = 100N/m (4)

Γ2. Αφού η κρούση γίνεται ακαριαία τα σώματα δεν αλλάζουν θέση κατά τη διάρκειά της.
Έτσι η θέση του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t = 0 , συμπίπτει με τη θέση x_1 του σώματος Σ ακριβώς πριν την κρούση.

$$\text{Δηλαδή } x_1 = 0{,}8\sqrt{3}\cdot ημ\left(5\sqrt{2}\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) m = 0{,}8\sqrt{3}\, m \quad (5)$$

Με βάση τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του Σ πριν την κρούση έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \text{ ή } A_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k}u^2 + x_1^2}$$

και με βάση τις (2) , (4) , (5) προκύπτει $A_1 =$ 1,6m .

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Μανώλης Δρακάκης