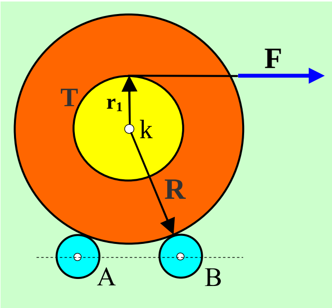
Ένας τροχός πάνω σε δυο μικρούς κυλίνδρους



Ένας τροχός μάζας M = 12 kg και ακτίνας R = 0,64 m , ακουμπά πάνω σε δυο μικρούς κυλίνδρους A και B όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι μικροί κύλινδροι, έχουν ίσες μάζες $m_A = m_B = m = M/4$, ακτίνες $r_A = r_B = r = R/8$, και μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από σταθερούς οριζόντιους άξονες που συμπίπτουν με τον άξονά τους. Οι άξονες των μικρών κυλίνδρων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Αβαρής τροχαλία Τ ακτίνας $r_1 = R/2$ είναι στερεωμένη στη βάση του τροχού όπως στο σχήμα , έχοντας πολλές φορές τυλιγμένο στην περιφέρειά της , αβαρές μη εκτατό νήμα που δεν γλιστρά κατά την περιστροφή.

Αρχικά το σύστημα ηρεμεί.

Ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη **F** μέτρου F = 6,4π N , και ο τροχός αρχίζει να στρέφεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στους μικρούς κυλίνδρους.

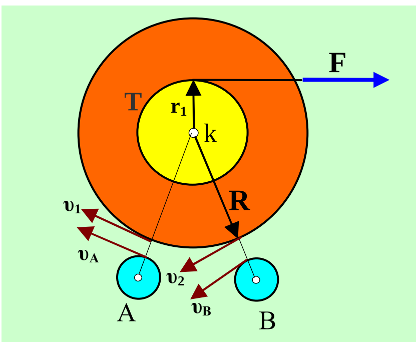
A. Να υπολογίσετε τις τιμές που θα έχουν τα παρακάτω μεγέθη στο τέλος της δεύτερης περιστροφής του τροχού.
   i. Η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του τροχού
   ii. Η γωνιακή ταχύτητα ω_2 των μικρών κυλίνδρων
   iii. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κάθε μικρού κυλίνδρου.

B. Αν αλείψουμε με λάδι τους κυλίνδρους , να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του τροχού στο τέλος της δεύτερης περιστροφής του.

Η ροπές αδράνειας I_1 του τροχού και του κάθε κυλίνδρου I_2 , ως προς τον άξονα που στρέφονται είναι $I_1 = ½MR^2$, $I_2 = ½mr^2$ αντίστοιχα , και $\pi^2=10$.

.

Απάντηση



σχήμα 1

i. Αφού που ο τροχός δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους, ένα μέρος της ενέργειας που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης **F**, μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των κυλίνδρων , μέσω του έργου της ροπής της στατικής τριβής που εμφανίζεται στα σημεία επαφής , το δε υπόλοιπο σε κινητική ενέργεια του τροχού. Έτσι , με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι

$W_F = K_{τροχ} + K_A + K_B$ ή

$$F \cdot r_1 \cdot \Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_A^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_B^2 \quad (1)$$

Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση, στα σημεία επαφής – σχήμα 1 - θα είναι $υ_1 = υ_A$ και $υ_2 = υ_B$. Όμως $υ_1 = υ_2$ (γραμμικές ταχύτητες στην περιφέρεια του τροχού) άρα $υ_A = υ_B$ ή $\omega_A r = \omega_B r$ ή $\omega_A = \omega_B = \omega_2$ (2)

άρα

$$F\cdot r_1\cdot\Delta\theta_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2+2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_2^2\right)\ (3)$$

Όμως $\upsilon_1=\upsilon_A$ ή $\omega_1 R=\omega_2 r$ ή $8r\omega_1=r\omega_2$ ή $\omega_2=8\omega_1$ (4)

είναι και $r = R/8$, $r_1 = R/2$ οπότε η (3) γράφεται έτσι

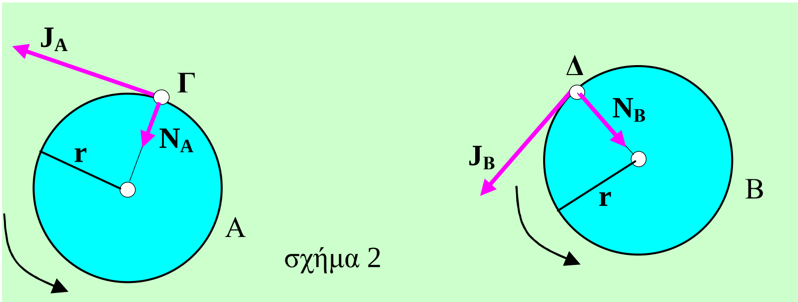
$$F\cdot\frac{R}{2}\cdot\Delta\theta_1=\frac{1}{4}\cdot MR^2\omega_1^2+\frac{1}{2}m\frac{R^2}{64}\cdot 64\omega_1^2 \ \text{ή}$$

$$F\cdot\Delta\theta_1=\frac{1}{2}\cdot MR\omega_1^2+\frac{M}{4}R\omega_1^2\ \text{ή}\ F\cdot\Delta\theta_1=\frac{3}{4}MR\omega_1^2\ \text{ή}\ \omega_1=\sqrt{\frac{4F\cdot\Delta\theta_1}{3MR}}=\sqrt{\frac{4\cdot 6,4\pi\cdot 4\pi}{3\cdot\frac{36}{3}\cdot 64\cdot 10^{-2}}}\ \text{rad/s}\ \text{ή}$$

$$\omega_1=\frac{10}{3}\text{rad/s}\ (5)$$

ii. Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $\omega_2=\frac{80}{3}\ \text{rad/s}$ (6)

iii. Η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος Α στο σημείο επαφής Γ, αναλύεται στην στατική τριβή $\mathbf{J_A}$ κατά την εφαπτομένη και στην κάθετη συνιστώσα $\mathbf{N_A}$ πάνω στην ακτίνα , όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Αντίστοιχα στον τροχό Β στην $\mathbf{J_B}$ και στη $\mathbf{N_B}$. Επειδή όμως, όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, είναι $\omega_A=\omega_B$



σχήμα 2

θα είναι και $\frac{d\omega_A}{dt}=\frac{d\omega_B}{dt}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu A}=\alpha_{\gamma\omega\nu B}$ ή $\frac{J_A r}{I_A}=\frac{J_B r}{I_B}$

όμως $I_A = I_B = ½mr^2$ άρα $J_A = J_B = J$.

Επειδή δε , η κινητική ενέργεια των κυλίνδρων οφείλεται στο έργο της ροπής της στατικής τριβής θα είναι

$2J\cdot r\ \cdot\Delta\theta_2=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_2^2\right)$ ή $J\cdot\Delta\theta_2=\left(\frac{1}{4}\cdot mr\right)\omega_2^2$ ή $J=\frac{mr\cdot\omega_2^2}{4\Delta\theta_2}=\frac{M\cdot r\cdot\omega_2^2}{16\Delta\theta_2}$ (7) όπου $\Delta\theta_2$ η γωνία που στρέφονται οι μικροί κύλινδροι.

Όμως με βάση την (4) έχουμε ότι $\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t}=8\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t}$ ή $\Delta\theta_2=8\Delta\theta_1$ ή $\Delta\theta_2 = 8\cdot 4\pi$ rad = 32π rad (8)

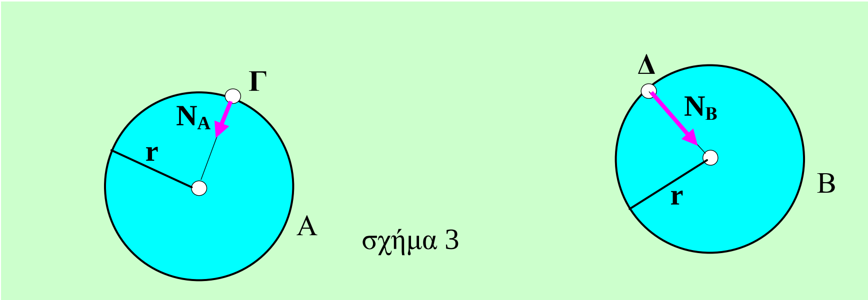
Από τις (6) , (7) και (8) προκύπτει $J=\frac{4}{3\pi}N$ (9)

iii. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κάθε κυλίνδρου έχει μέτρο

$$\frac{dL}{dt}=J\cdot r\ \text{ και με βάση την (9) }\ \frac{dL}{dt}=\frac{32}{3\pi}\cdot 10^{-2}\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2.$$

Β. Αν αλείψουμε με λάδι τους κυλίνδρους, δεν θα υπάρχουν τριβές.

Έτσι , οι δυνάμεις που δέχονται στα σημεία επαφής Γ και Δ είναι όπως στο σχήμα 3, και δεν δημιουργούν ροπές πάνω στους κυλίνδρους.



σχήμα 3

Άρα οι κύλινδροι δεν στρέφονται.

Κατά συνέπεια η κινητική ενέργεια του τροχού θα είναι ίση με το έργο της δύναμης **F**

δηλαδή

$$K = F \cdot r \cdot \Delta\theta_1 = 6,4\pi \cdot 32 \cdot 10^{-2} \cdot 4\pi \text{ J} = \mathbf{81,92\ J}$$

Επιμέλεια:

Μανώλης Δρακάκης