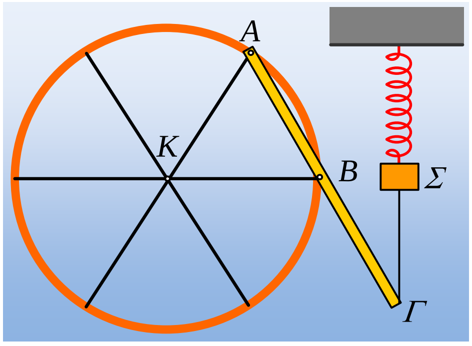
Ένα στερεό και μια ΑΑΤ.



Ο τροχός του σχήματος ακτίνας R=1,4m και μάζας M=6kg μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του Κ. Καρφώνουμε πάνω του μια ομογενή ράβδο ΑΓ, μήκους 2R και μάζας m_1 =M, στο άκρο της Α και στο μέσον της Β, δημιουργώντας το στερεό S. Το άκρο Γ της ράβδου έχει δεθεί με αβαρές κατακόρυφο νήμα, με σώμα Σ μάζας m, το οποίο ισορροπεί στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m, το οποίο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ =0,5m. Το σύστημα ισορροπεί ενώ το μέσον Β της ράβδου βρίσκεται στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας του τροχού.

i) Να υπολογιστεί η μάζα m_2 του σώματος Σ.

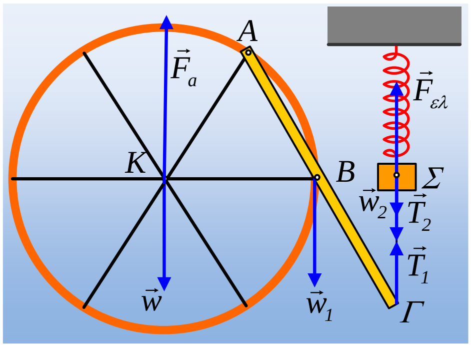
Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα που συνδέει τη ράβδο με το σώμα Σ. Να βρεθούν:

ii) Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος Σ και του άκρου Γ (επιτρόχια επιτάχυνση) της ράβδου.

iii) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος Σ και του άκρου Γ της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\dfrac{1}{12}M\ell^2$ ενώ g=10m/s^2. Η μάζα του τροχού να θεωρηθεί συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, αφού οι ακτίνες του θεωρούνται αμελητέας μάζας.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό S και στο σώμα Σ. Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισόπλευρο, συνεπώς η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση είναι 60°, οπότε η γωνία που σχηματίζει με την διεύθυνση του νήματος είναι ίση με 30°.

Το στερεό S ισορροπεί, συνεπώς ΣF=0 και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Οπότε παίρνοντας ως προς το σημείο Κ θα έχουμε:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow T_1\left(R+(B\Gamma)\eta\mu 30^o\right)-MgR=0$$

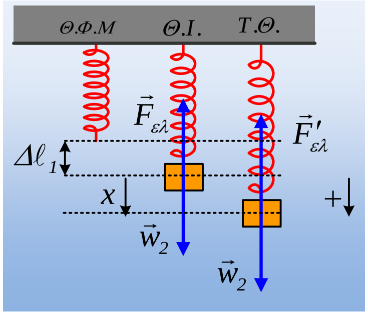
$$T_1\frac{3R}{2}-MgR=0 \rightarrow T_1=\frac{2}{3}Mg=40N$$

Ερχόμαστε τώρα στο σώμα Σ το οποίο ισορροπεί, δεχόμενο την τάση του νήματος T_2 ίσου μέτρου με την τάση T_1 που υπολογίσαμε παραπάνω (αβαρές νήμα) και παίρνουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=m_2 g+T_2 \rightarrow$$

$$m_2=\frac{k\Delta\ell-T_2}{g}=\frac{100\cdot 0{,}5-40}{10}kg=1kg$$

ii) Μόλις κόψουμε το νήμα που συνδέει το σώμα Σ με τη ράβδο, το σώμα θα εκτελέσει μια ΑΑΤ, γύρω από μια θέση ισορροπίας, ξεκινώντας την ταλάντωσή του με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς από θέση πλάτους. Αλλά τότε σε αυτή τη θέση θα έχει και μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση, ίση με $\alpha_{max}=\omega^2 \cdot A$, όπου Α το πλάτος ταλάντωσης. Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα, στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_1$ και αφού ΣF=0, τότε:



$$F'_{\varepsilon\lambda}=m_2 g \rightarrow \Delta\ell_1=\frac{m_2 g}{k}=\frac{10}{100}m=0{,}1m$$

Εξάλλου παίρνοντας το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F=m_2 g-F'_{\varepsilon\lambda}=m_2 g-k(\Delta\ell_1+x)=-kx$$

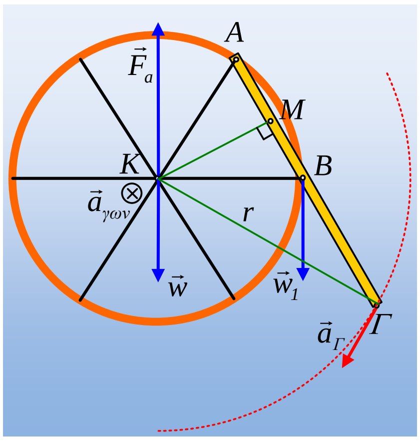
Συνεπώς, πράγματι το σώμα Σ εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D=k.

Τη στιγμή όμως που ξεκινά η ταλάντωση, το ελατήριο είχε επιμήκυνση 0,5m, συνεπώς το σώμα απέχει από τη θέση ισορροπίας $x=A=\Delta\ell-\Delta\ell_1=0{,}5m-0{,}1m=0{,}4m$.

Αλλά τότε η μέγιστη επιτάχυνσή του έχει μέτρο:

$$\alpha_{max}=\omega^2 A=\frac{k}{m}A=\frac{100}{1}0{,}4m/s^2=40m/s^2.$$

Ερχόμαστε τώρα στο στερεό S, το οποίο δέχεται τη ροπή του βάρους w_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του, με αποτέλεσμα να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση, οπότε το άκρο Γ θα αποκτήσει (επιτρόχια) επιτάχυνση $\alpha_\Gamma=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot r$, όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράφει, κάθετη στην ακτίνα ΚΓ. Αλλά τότε η μέγιστη επιτάχυνσή του θα είναι στη θέση που και η ασκούμενη ροπή είναι μέγιστη. Αυτό θα συμβεί στην αρχική του θέση, μόλις κοπεί το νήμα, αφού στη συνέχεια θα μειωθεί ο μοχλοβραχίονας του βάρους w_1.



Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής στο Κ, παίρνοντας:

$$I_K=I_{\tau\rho}+I_\rho=MR^2+\left(\frac{1}{12}m\ell^2+mR^2\right)=MR^2+\left(\frac{1}{12}M4R^2+MR^2\right)=\frac{7}{3}MR^2$$

Οπότε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση του στερεού S, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau=I_K\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow MgR=\frac{7}{3}MR^2 a_{\gamma\omega\nu}\rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3g}{7R}$$

Ενώ η ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το άκρο Γ είναι η υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΓ, οπότε από το Π.Θ. θα έχουμε (η πλευρά (ΚΜ)=$\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ως το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς R):

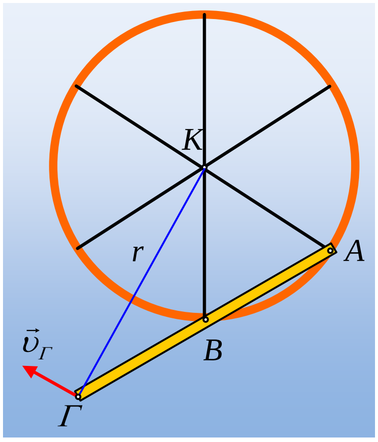
$$r=\sqrt{(KM)^2+(M\Gamma)^2}=\sqrt{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3R}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12R^2}{4}}=R\sqrt{3}$$

Αλλά τότε, για το μέτρο της επιτάχυνσης του άκρου Γ θα έχουμε:

$$\alpha_\Gamma=a_{\gamma\omega\nu}r=\frac{3g}{7R}\cdot R\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{7}g\approx 7{,}4m/s^2.$$

iii) α) Η μέγιστη ταχύτητα του Σ, το οποίο εκτελεί ΑΑΤ, θα είναι η ταχύτητά του στη θέση ισορροπίας, μέτρου:

$$\upsilon_{max}=\omega\cdot A=\sqrt{\frac{k}{m_2}}A=\sqrt{\frac{100}{1}}0{,}4m/s=4m/s.$$



β) Το στερεό S επιταχύνεται στροφικά για όσο διάστημα η ροπή του βάρους w_1 το επιταχύνει με την ίδια φορά, όπως και στην αρχική θέση. Αυτό θα συμβαίνει μέχρι τη θέση που το κέντρο μάζας της ράβδου Β φτάσει στο άκρο της κατακόρυφης διαμέτρου του τροχού, όπως στο διπλανό σχήμα, έχοντας κατέβει κατά R. Στη θέση αυτή το στερεό S θα έχει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, συνεπώς και το σημείο Γ μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_\Gamma=\omega\cdot r$.

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της αρχικής θέσης και της θέσης που το Β βρίσκεται στο άκρο της κατακόρυφης διαμέτρου και θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το μέσον Β της ράβδου στην δεύτερη θέση, παίρνουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$mgR+MgR=\frac{1}{2}I_K\omega^2+MgR\rightarrow$$

$$MgR=\frac{1}{2}\frac{7}{3}MR^2\cdot\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{6g}{7R}}$$

Οπότε η μέγιστη ταχύτητα του άκρου Γ έχει μέτρο:

$$\upsilon_{max}=\omega\cdot r=\sqrt{\frac{6g}{7R}}\cdot R\sqrt{3}=\sqrt{\frac{18}{7}gR}=6m/s$$

Ας σημειωθεί ότι η μέγιστη ταχύτητα που υπολογίσαμε, έχει διεύθυνση κάθετη στην ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς του σημείου Γ. Αν προτιμάτε σχηματίζει γωνία 120° με τη ράβδο, όπως στο σχήμα.

(Λίγη Γεωμετρία είναι πάντα χρήσιμη….)

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης