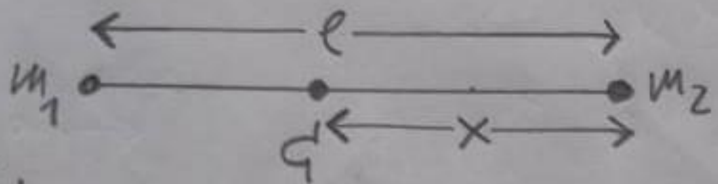
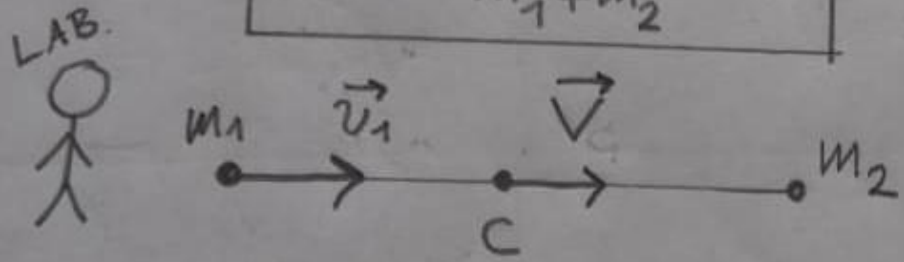
Εστω δυο, μάζες m_1, m_2, $m_1 > m_2$, οι οποίες απέχουν αποσταση ℓ. Αν οι δυο μάζες ειναι ακίνητες τότε το κέντρο μάζας τους βρισκεται στην θεση C η οποία απεχει απο την μάζα m_2, απόσταση $x = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ell$.



Αν η μάζα m_1 κινειται με ταχύτητα v_1 προς την μαζα m_2 ενω η μάζα m_2 ειναι ακίνητη, τότε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d\ell}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot v_1} \qquad (1)$$

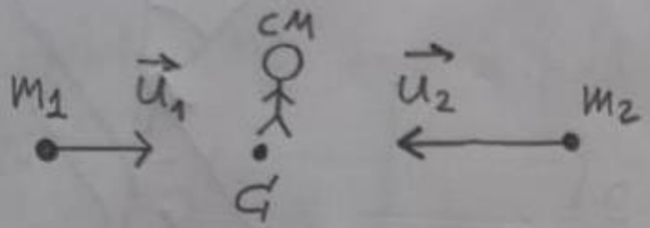


Δηλαδη ενας παρατηρητης που ως σύστημα αναφορας χρησιμοποιει το εργαστήριο, βλέπει την μαζα m_1 να κινειται με ταχύτητα $\vec{v}_1$, την μαζα m_2 να ειναι ακίνητη, και το κεντρο μαζας C να κινείται με ταχύτητα $\vec{V}$

Ενας παρατηρητης που βρίσκεται πάνω στο κεντρο μαζας, προφανως τον εαυτο του τον βλέπει ακίνητο, ενω τις μαζες m_1, m_2 τις βλεπει να κινουνται μεταχύτητες $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ των οποιων τα μέτρα είναι:

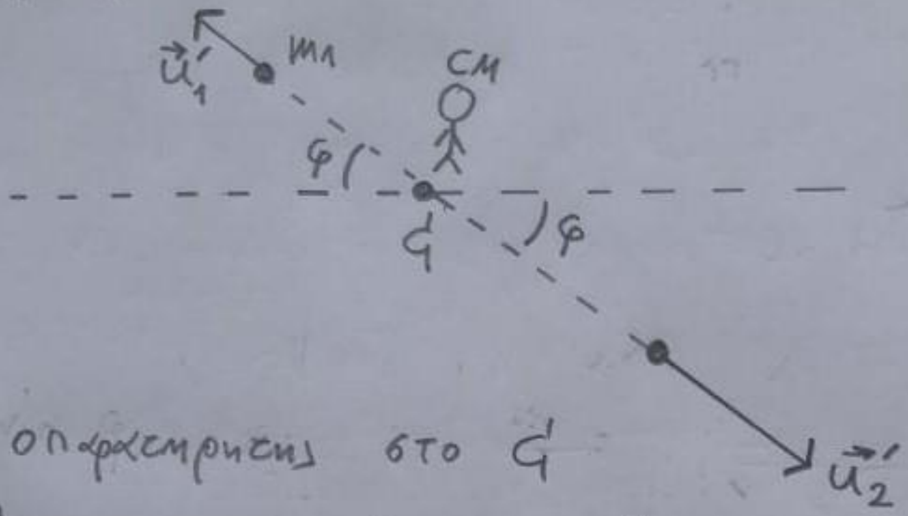
$$u_1 = \upsilon_1 - V = \upsilon_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1. \quad (2)$$

και $u_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \quad (3)$

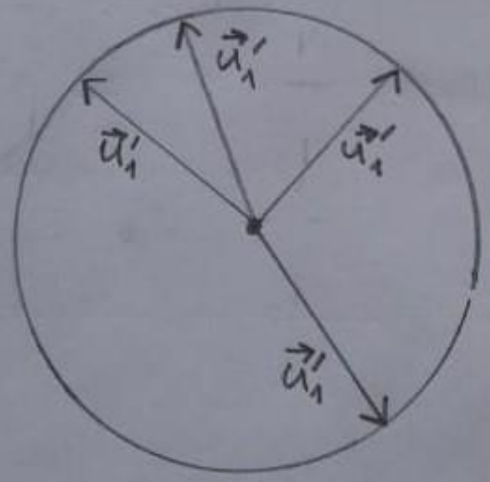


Στο συστημα κεντρου μάζας η συνολικη ορμη ειναι μηδέν. Αν οι μαζες m_1, m_2 συγκρουσθούν, τοτε η συνολικη ορμή θα ειναι μηδέν και μετά την κρούση. Αν η κρούση ειναι και ελαστική, τότε και η ολικη κινητική ενεργεια πρίν και μετα την κρούση θα ειναι ιδια. Αν οι ταχύτητες των m_1, m_2 μετα την κρούση ειναι $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$ τοτε αν $|\vec{u}_1| = |u_1'|$ και $|\vec{u}_2| = |\vec{u}_2'|$ και $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$ αντίρροπες, τοτε πληρού-νται και οι δυο πιο πανω συνθηκες, αρα αυτη

Θα ειναι η τελικη κατάσταση.



Αρα ο παρατηρητης στο G θα βλεπει την ταχύτητα $\vec{u}_1'$ να εχει μετρο $\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1$ και οποιαδήποτε γωνία φ. Αρα μπορούμε το διανυσμα $\vec{u}_1'$ να το τοποθετησουμε σε κυκλο ακτινας $R=|\vec{u}_1'|=|\vec{u}_1|=\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1$

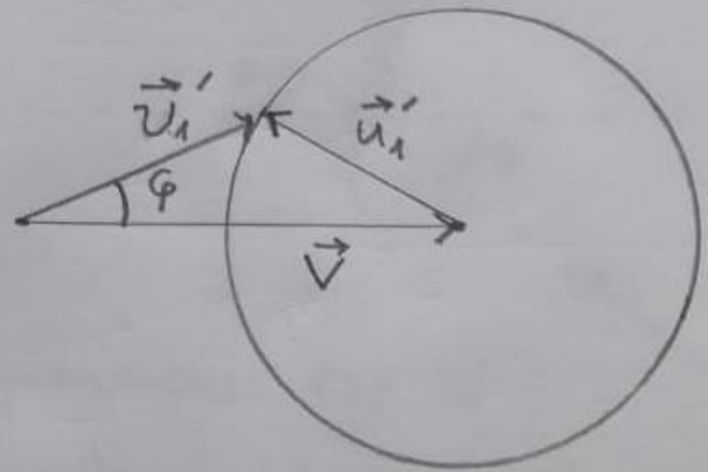


Με βαση την εξισωση (Π1) του παραρτήματος, αν η ταχυτητα της μάζας m_1 μετα την κρούση ως προς τό συστημα αναφορας του εργαστηρίου ειναι $\vec{v}_1'$, πρεπει να ισχύει:

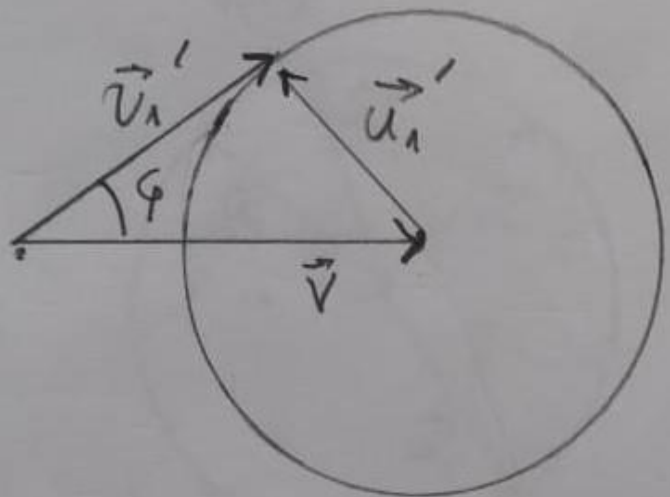
$$\vec{u}_1'=\vec{v}_1'-\vec{V}$$

ή $\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{V}$

ή



Είναι προφανές ότι η γωνία φ μεταξύ των ταχυτήτων $\vec{V}$ και $\vec{v}_1'$ ή ισοδύναμα μεταξύ των ταχυτήτων $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1'$, γίνεται μέγιστη όταν η $\vec{v}_1'$ είναι εφαπτομένη στον κύκλο.

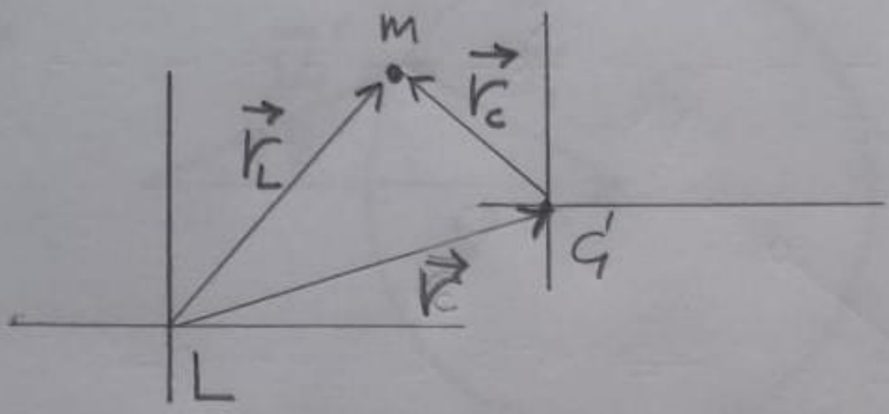


Τότε όμως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο οπότε

$$\eta\mu\varphi = \frac{|\vec{u}_1'|}{|\vec{V}|} = \frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1}{\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1} \quad \text{ή} \quad \boxed{\eta\mu\varphi = \frac{m_2}{m_1}}$$

Παράρτημα

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.



Εστω ενα σωματίδιο m του οποιου το διανυσμα θεσης ως προς το συστημα αναφορας L ειναι $\vec{r}_L$ ενω ως προς ενα αλλο συστημα αναφορας C, το διανυσμα θεσης ειναι $\vec{r}_c$.
Αν το διανυσμα θεσης του παρατηρητη C ως προς τον L ειναι $\vec{r}$ τότε:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_L - \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d\vec{r}_L}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ή $\boxed{\vec{u} = \vec{\upsilon} - \vec{V}}$ (Π_1)