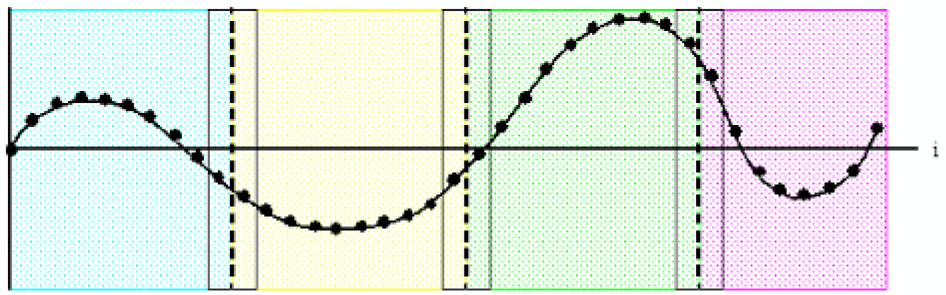
Ταλάντωση μη αβαρούς χορδής και κυματική μελέτη

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
19-1-2021

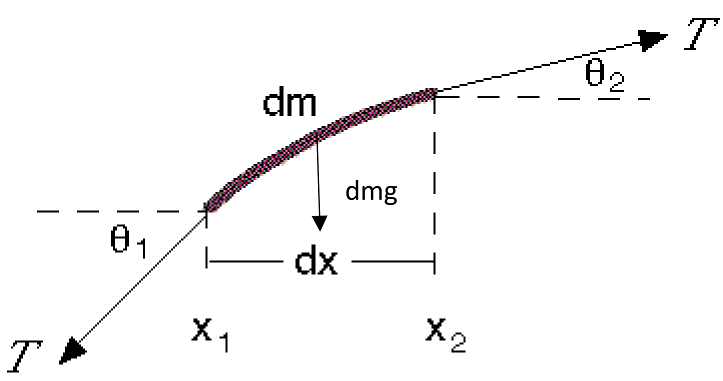
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έστω ότι μια χορδή μήκους L και πυκνότητας μ, τα άκρα της οποίας είναι ακλόνητα ψ(0,t)=ψ(L,t)=0. Υποθέτουμε ότι η χορδή βρίσκεται εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου έντασης $\vec{g}$ και ότι η διάδοση κύματος της γίνεται πάνω στον άξονα x. Αν η χορδή είναι μη εκτατή τότε κάθε σημείο της πρέπει να ορίζει μια συνάρτηση τάσης T(x) η οποία να είναι σταθερή T(x)=T. Αν διαφορετικές τάσεις επικρατούσαν σε διαφορετικά σημεία τότε η χορδή θα αύξανε ή θα μίκραινε το μήκος της, πράγμα άτοπο.



ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Έστω ένα τμήμα ΔL της χορδής με μάζα προφανώς Δm=μ.ΔL. Στο σχήμα παρακάτω φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο τμηματίδιο.



Αν θεωρήσουμε μια ότι για την αρχή και το τέλους του τμήματος, έχουμε τις γωνίες φ(x) και φ(x+Δx) αντίστοιχα, τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα θα πάρει την μορφή:

$$T[\sin\varphi(x+\Delta x,t) - sin\varphi(x,t)] - \mu\Delta L g = \mu\Delta L\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

(1)

Αν διαιρέσουμε την (1) με τον όρο ΔL θα πάρουμε:

$$T\ \frac{\sin\varphi(x+\Delta x,t) - sin\varphi(x,t)}{\Delta L} - \mu g = \mu\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

(2)

Έστω ότι το Δx →0 οπότε Δx=dx. Αν αναπτύξουμε την συνάρτηση sinφ σε σειρά Maclaurin θα έχουμε:

$$sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \cdots$$

(3)

Για μικρές γωνίες φ είναι λοιπόν $sin\varphi \approx \varphi$. Τότε όμως είναι φ αρκετά μικρή ώστε ΔL=dx όταν Δx→0. Οπότε η σχέση (1) γράφεται ξανά:

$$T\ \frac{\varphi(x+dx,t) - \varphi(x,t)}{dx} - \mu g = \mu\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

(4)

Δηλαδή:

$$\frac{T}{\mu}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} + g$$

(5)

Αν αναπτύξουμε και την συνάρτηση tanφ σε σειρά Maclaurin θα πάρουμε ότι $\varphi \approx tan\varphi$ για μικρές γωνίες φ. Επομένως θα έχουμε:

$$\varphi \approx tan\varphi = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$

(6)

Άρα τελικά η σχέση (5) γράφεται τώρα:

$$c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi^2(x,t)}{\partial t^2} + g$$

(7)

Η (7) είναι η μερική διαφορική κυματική εξίσωση όπου $c = \sqrt{T/\mu}$

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Αν πάμε να εφαρμόσουμε απευθείας την μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών, τότε η λύση θα είναι δύσκολη γιατί ορισμένες από τις αρχικές συνθήκες μπορεί να μην είναι ομογενείς και ο όρος g επιπλέον δεν είναι βοηθητικός. Για να συνεχίσουμε γράφουμε τις οριακές και αρχικές συνθήκες υποθέτοντας ότι η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική. Έχουμε:

- Οριακές: $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$
- Αρχικές: $\psi(x,0) = f(x)\ \ \kappa\alpha\iota \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t} = 0$

Εφόσον η (7) δεν είναι ομογενής, θα πρέπει να κάνουμε μετασχηματισμό της συνάρτησης ψ(x,t) σε επιμέρους συναρτήσεις μια εκ των οποίων να ικανοποιεί την γνωστή ομογενή κυματική εξίσωση. Δηλαδή, έστω ότι:

$$\psi(x,t) = y(x,t) + w(x)$$

(8)

Όπου:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

(9)

Αντικαθιστώντας την (8) στην κυματική εξίσωση (7) και βάσει της (9) παίρνουμε ότι:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{g}{c^2} \Longrightarrow w(x) = \frac{g}{2c^2}x^2 + Ex + \Gamma$$

(10)

Εκμεταλλευόμενοι τις οριακές συνθήκες της ψ (δηλ. ψ(0,t)=ψ(L,t)) και το γεγονός ότι η y ικανοποιεί επίσης ομογενείς οριακές συνθήκες, έχουμε:

$$w(x) = \frac{g}{2c^2}x(x-L)$$

(11)

Άρα λοιπόν έχουμε το νέο διαφορικό σύστημα:

$$\psi(x,t) = y(x,t) + \frac{g}{2c^2}x(x-L)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t} = 0, \psi(x,0) = f(x)$$

(12)

Η λύση της y (έχοντας συμπεριλάβει την πρώτη οριακή συνθήκη) είναι η συνηθισμένη (συναρτήσει της σταθεράς k):

$$y(x,t) = \sin(kx)\,[Asin(ckt) + Bcos(ckt)]$$

(13)

Βάζουμε την δεύτερη οριακή συνθήκη και πρέπει:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \;\; n = 1,2, \ldots.$$

(14)

Αυτό σημαίνει πως η y έχει άπειρες μερικές λύσεις, και λόγω της γραμμικότητας της, η γενική λύση της y είναι η υπέρθεση των μερικών. Άρα έχουμε την y(χ,t) ως σειρά Fourier στην μορφή:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right]$$

(15)

Έτσι τελικά η ψ(x,t) έχει την μορφή:

$$\psi(x,t) = \frac{g}{2c^2}x(x-L) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right]$$

(16)

Εφαρμόζουμε πρώτη την αρχική συνθήκη της ταχύτητας, και προκύπτει ότι $A_n = 0$, άρα η (16) μετασχηματίζεται:

$$\psi(x,t) = \frac{g}{2c^2}x(x-L) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)$$

(17)

Τώρα η πλήρης λύση απαιτεί και την εύρεση του συντελεστή Fourier B_n. Βάσει της αρχικής ψ(x,0)=f(x), μπορούμε να τον προσδιορίσουμε. Θα έχουμε:

$$\psi(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Bnsin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) - \frac{g}{2c^2}x(x-L) = f(x) - w(x)$$

(18)

Όπως είναι γνωστό, ο συντελεστής Fourier υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \big(f(x) - w(x)\big)\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{L}x\right)dx$$

(19)

Έτσι η (18) και (19) αποτελούν την λύση της εξίσωση (7) και εν τέλει αυτό που αναζητούσαμε.

ΠΙΘΑΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ f(x)

Η συνάρτηση f(x) παριστάνει την αρχική μορφή της χορδής. Περιγράφει δηλαδή μια καμπύλη που εξαρτάται από το πως έχουμε διαμορφώσει αρχικά την χορδή, Μπορεί να έχει γραμμική μορφή (κατά προσέγγιση) ή ακόμα να έχει τριγωνομετρική. Οποιαδήποτε και να είναι η μορφή της, μπορούμε να βρούμε με όσο καλή προσέγγιση θέλουμε το ολοκλήρωμα (19) και κατά συνέπεια και την ψ(x,t)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από τις σχέσεις (18) και (19), μπορούμε να γνωρίζουμε την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση, κάθε σημείου της χορδής κάθε χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει. Αυτό σημαίνει ότι έχει γίνει πλήρης μελέτη του φαινόμενου. Ένα «φυσικό» τέτοιο φαινόμενο είναι η ταλάντωση της χορδής μια κιθάρας. Η κιθάρα έχει ακλόνητα τα άκρα των χορδών της, αρχικά ξεκινούν χωρίς ταχύτητα, έχουν κάποια αρχική απομάκρυνση και μάλιστα είναι πολύ εύκολη η εύρεση της σταθεράς c, αφού η τάση T είναι ρυθμιζόμενη.