Μια διαφορετική ματιά στις εξισώσεις Euler-Lagrange

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
15-2-2021

Η σημασία των εξισώσεων Euler-Lagrange στην φυσική, είναι σπουδαία και ιδιαίτερα στο κομμάτι της αναλυτικής μηχανικής. Βάσει αυτών, μπορούμε να βρίσκουμε πολλά πράγματα, μεταξύ των οποίων και τις διαφορικές κίνησης ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων). Φυσικά βασίζονται στην συνθήκη, πως το ολοκλήρωμα της Lagragian να είναι στάσιμο (να παρουσιάζει ακρότατο). Η απόδειξη τους γίνεται συνήθως απαιτώντας το δS να είναι μηδενικό, όπου S η δράση.

Η δράση «εκφράζει» κάθε φυσική, ή νοητή τροχιά. Απαιτώντας να ισχύει δS=0 περιορίζουμε μια απότομη αλλαγή στην τροχιά. Δηλαδή ένα σώμα μπορεί μέσα σε ελάχιστο χρονικό διάστημα να κάνει μια τρομερή αλλαγή στην τροχιά που ακολουθεί κάποια στιγμή. Ανεξάρτητα αυτού, το σημαντικό είναι ότι η «στασιμοποιήση»» της δράσης δεν απαιτεί μικρές αλλαγές. Αυτό είναι που μελετάω παρακάτω, αποδεικνύοντας με έναν πιο αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις Euler-Lagrange για μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών (αν η συνάρτηση είναι η Lagragian τότε έχουμε ακολουθίες συντεταγμένων και ακολουθίες παραγώγων συντεταγμένων).

Έστω λοιπόν η συνάρτηση Lagrange $\mathcal{L}(\{x_i(t)\},\{\dot{x}_i(t)\},t)$ με x_i και $\dot{x}_i$ να εκφράζουν μια γενικευμένη συντεταγμένη και την παράγωγο της. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$S = \int_{t}^{t\prime} \mathcal{L}(\{x_i(t)\},\{\dot{x}_i(t)\},t)\,dt = \int_{t}^{t\prime} \mathcal{L}\,dt$$

(1)

Θέλουμε να σταθμίσουμε την δράση, δηλαδή να κάνουμε το ολοκλήρωμα να παρουσιάζει ακρότατο (είτε ελάχιστο είτε μέγιστο). Θεωρούμε μια νέα ακολουθία συναρτήσεων g, όπου για τον όρο i να ισχύει:

$$g_i(t) = x_i + \varepsilon_i n_i(t)$$

(2)

Όπου n μια τυχαία συνάρτηση και ε ένας αριθμός. Τότε ορίζουμε το νέο ολοκλήρωμα S' ίσο με:

$$S' = \int_{t}^{t'} \mathcal{L}(\{g_i(t)\},\{\dot{g}_i(t)\},t)dt = S'\{\varepsilon_i\}$$

(3)

Με τον μετασχηματισμό της (2), το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ουσιαστικά συνάρτηση των ε_i. Εφόσον θέλουμε να παρουσιάζει ακρότατο η (1) , τότε από το γενικευμένο θεώρημα του Fermat για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, έχουμε πως θα πρέπει για την (3), να ισχύει όταν $\varepsilon_i = 0$, ότι:

$$\left.\frac{\partial S'}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} = 0 \Rightarrow \int_t^{t'} \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} dt = 0$$

(4)

Έχουμε όμως ότι:

$$\frac{\partial S'}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_i}\frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_i}\frac{\partial \dot{g}_i}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_i} n_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}_i}\dot{n}_i \Rightarrow \left.\frac{\partial S'}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\dot{n}_i$$

(5)

Έτσι βάζοντας την σχέση (5) στην εξίσωση (4) έχουμε:

$$\int_t^{t'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} n_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\dot{n}_i\right) dt = 0 \Rightarrow \int_t^{t'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right)\right) n_i(t) dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} n_i(t)\right]_t^{t'} = 0$$

(6)

Εδώ είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι οι τυχαίες συναρτήσεις n που έχουμε επιλέξει, ικανοποιούν τις ομογενείς συνθήκες. Αυτό είναι καθαρά θέμα ορισμού. Έτσι λοιπόν η σχέση (6) γίνεται:

$$\int_t^{t'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right)\right) n_i(t) dt = 0$$

(7)

Το ολοκλήρωμα της (7) ισχύει για κάθε συνάρτηση n_i που ικανοποιεί ομογενώς τις αρχικές συνθήκες. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

(8)

Η εξίσωση (8), λέγεται διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange. Ισχύει όπως φαίνεται από την (8) για κάθε γενικευμένη συντεταγμένη. Η εφαρμογή της στην φυσική είναι εξαιρετικά συνηθισμένη. Ας δούμε όμως περισσότερο την «φυσική» σκοπιά του προβλήματος. Έστω ότι ορίζουμε ως δράση το ολοκλήρωμα:

$$S = \int_t^{t'} (T - V)\, dt$$

(9)

Όπου T η κινητική ενέργεια και V το δυναμικό. Ορίζοντας ως Lagragian, την ολοκληρωτέα της (9), είναι:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i}^{n} \dot{x}_i^2 - V$$

(10)

Έστω ότι θέλουμε να κάνουμε το ολοκλήρωμα της (9) στάσιμο. Τότε από τις εξισώσεις Euler-Lagrange, για μια γενικευμένη συντεταγμένη έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = 0 \Longrightarrow F(x_i) = \dot{p}_{x_i}$$

(11)

Δηλαδή, κάνοντας στάσιμο το ολοκλήρωμα (9), παίρνουμε τον δεύτερο νόμο του Newton. Αυτό ονομάζουμε ως αρχή της ελάχιστης δράσης. Ότι δηλαδή ένα σωματίδιο, ακολουθεί τέτοια φυσική τροχιά, ώστε η δράση του να παρουσιάζει ακρότατο. Η σημασία της αρχής της ελάχιστης δράσης, είναι εξαιρετικά σημαντική και βρίσκει τρομερές εφαρμογές. Επεκτείνοντας μπορούμε να μιλήσουμε για την συνάρτηση Hamilton, τις ιδιότητες της, τις γενικευμένες ορμές κτλ. Όλα όμως αυτά, είναι αποτέλεσμα της αρχής της ελάχιστης δράσης.