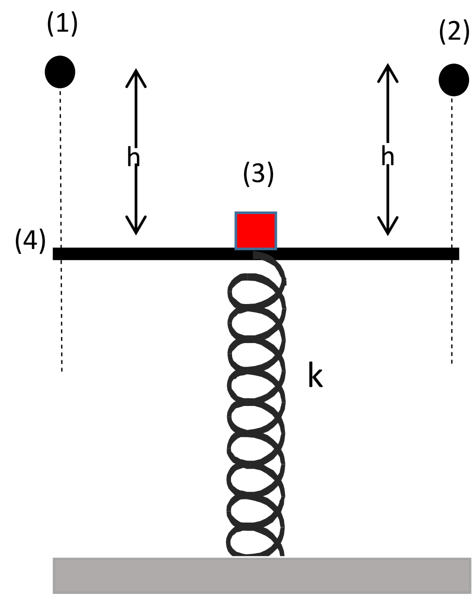
2 ΘΕΜΑΤΑ **ΘΕΜΑ 1**



Η μικρή τάβλα (4) έχει μάζα m , στο μέσο της από κάτω συνδέεται με το πάνω άκρο του ελατηρίου σταθεράς k και στο μέσο της από πάνω είναι τοποθετημένο μικρό σώμα (3) μάζας m. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο με το δάπεδο. Η τάβλα και το σώμα (3) ισορροπούν . Στις κατακόρυφες που διέρχονται από τα άκρα της τάβλας και σε ύψος h από αυτή, κρατάμε δύο ίδια, μικρά σώματα (1), (2) που έχουν μάζα m/2 το καθένα. Αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα (1),(2). Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά με τα άκρα της τάβλας.

Αν το σώμα (3) συγκρούεται με την τάβλα τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά της, να βρείτε το ύψος h από το οποίο αφήσαμε τα σώματα (1),(2).

Δίνονται : $\pi^2 = 10$, g= 10m/s^2 , $\frac{k}{m} = 125 \frac{N}{Kg.m}$, Η τάβλα είναι ομογενής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τα σώματα (1), (2) όταν φτάνουν στα άκρα της τάβλας έχουν ταχύτητες με μέτρα: $u_1=u_2 = \sqrt{2gh}$.

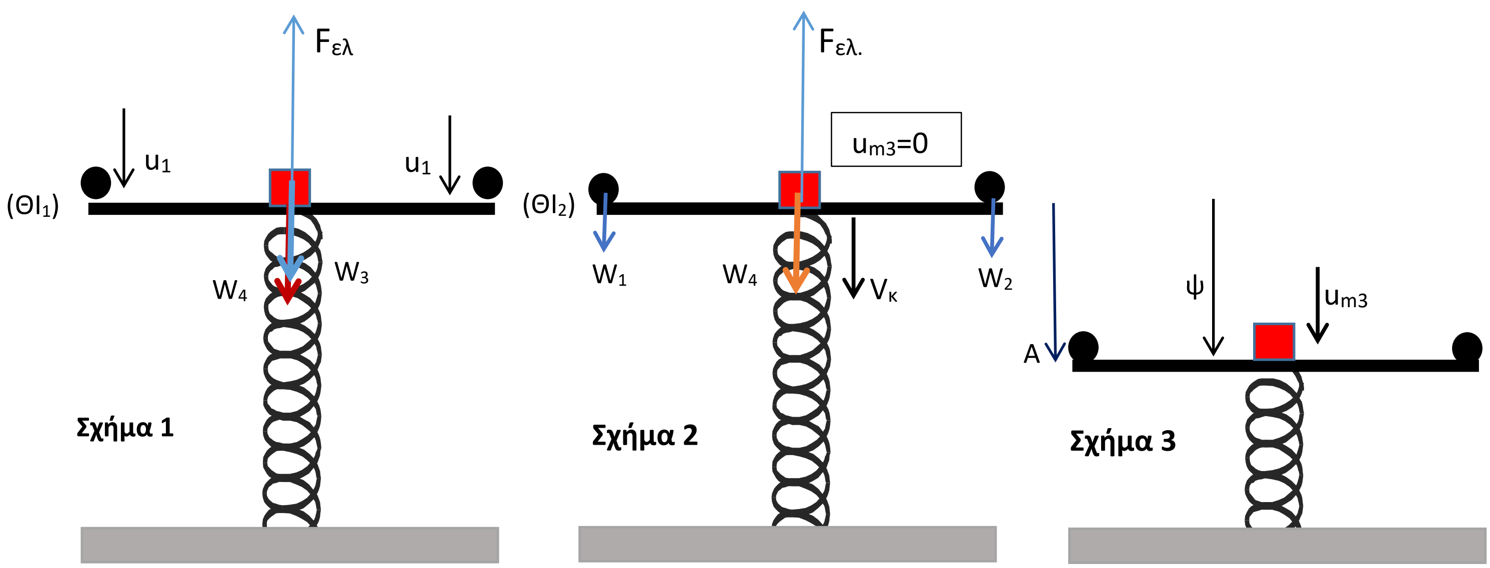
Οι πλαστικές κρούσεις στα άκρα της τάβλας γίνονται με τις ίδιες συνθήκες με αποτέλεσμα οι δυνάμεις στα άκρα της τάβλας να είναι ίσες, κατακόρυφες και προς τα κάτω κάθε χρονική στιγμή. Επειδή και οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στην τάβλα, δηλαδή το βάρος της, η δύναμη από το ελατήριο και η δύναμη από το m_3 είναι στην κατακόρυφη διεύθυνση η τάβλα θα βρίσκεται στην οριζόντια διεύθυνση και κατά τη διάρκεια της κρούσης και κατά την κίνησή της μετά την κρούση.

Επειδή κατά τη διάρκεια της κρούσης αλληλοεπιδρούν με εσωτερικές δυνάμεις το σώμα (1) και το σώμα (2) με την τάβλα, εφαρμόζουμε την ΑΔΟ κατακόρυφα για τα σώματα αυτά. <u>Ή αλλιώς</u>: Μεταξύ του σώματος (3) και της τάβλας κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις , η τάβλα φεύγει προς τα κάτω λόγω τη κρούσης της με τα άλλα σώματα και το σώμα (3), αμέσως μετά την κρούση, έχει ταχύτητα μηδέν.

ΛΙΓΟ ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΚΡΟΥΣΗ ΤΟΥ m_3 ΜΕ ΤΗΝ ΤΑΒΛΑ



ΑΔΟ : $p_{πριν.} = p_{μετά.}$ => $2\,\frac{m}{2}\,u_1 = 2m\,V_κ$ => $V_κ = u_1/2 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$ (1)

Αμέσως μετά την κρούση τα σώματα τάβλα-(1)-(2) θα κάνουν ΑΑΤ και το σώμα m_3 θα κάνει ελεύθερη πτώση.

Στη ΘΙ$_1$ (Σχήμα 1)της τάβλας και του σώματος m_3 πριν την κρούση η συσπείρωση x_1 του ελατηρίου είναι: $ΣF = 0$ => $kx_1 = 2mg$ => $x_1 = \frac{2mg}{k}$ (2)

Στη ΘΙ$_2$ (Σχήμα 2) της τάβλας και των σωμάτων (1), (2) μετά την κρούση η συσπείρωση x_2 του ελατηρίου είναι: $ΣF = 0$ => $kx_2 = mg + mg/2 + mg/2$ => $x_2 = \frac{2mg}{k}$ (3)

Επειδή $x_1 = x_2$ δεν γίνεται αλλαγή της ΘΙ πριν και μετά την κρούση και η V_κ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ΑΑΤ.

Από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα της τάβλας (Σχήμα 3) ο χρόνος $t_1 = \frac{T}{4}$ όπου Τ η περίοδος ταλάντωσης της τάβλας.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{125}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{250}} = 2\sqrt{10}\,2\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{4}{5} = 0{,}8\ s$

Άρα $T = 0{,}8s$ και $t_1 = \frac{T}{4} = 0{,}2\ s$ (4)

Το πλάτος ταλάντωσης Α ισούται με τη μετατόπιση του σώματος (3) από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να συναντηθεί με την τάβλα.

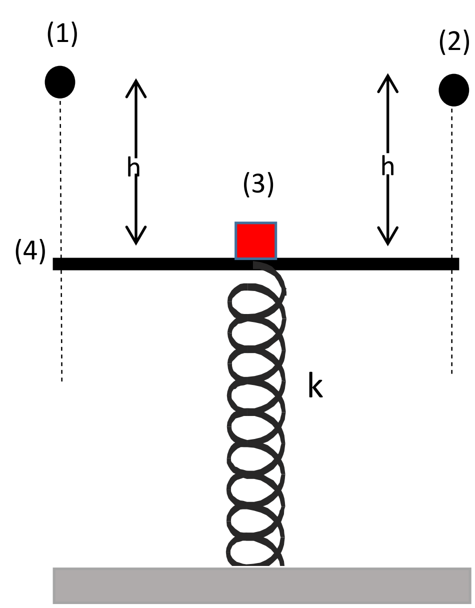
$A = \psi = \frac{1}{2} g t_1^2$ και με την (4) $A = \frac{1}{2}10\,(0{,}2)^2 = 0{,}2\ m$ (5)

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι: $V_\kappa = \omega A$ και με τις σχέσεις (1), (4) , (5) =>

$\frac{\sqrt{2gh}}{2} = \frac{2\pi}{T} A$ => $\sqrt{2gh} = \pi$ => $2gh = \pi^2$ => $2gh = 10$ => $\boxed{h = 0{,}5m}$

ΘΕΜΑ 2

Η μικρή τάβλα (4) έχει μάζα m , στο μέσο της από κάτω συνδέεται με το πάνω άκρο του ελατηρίου σταθεράς k και στο μέσο της από πάνω είναι τοποθετημένο μικρό σώμα (3) μάζας m. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο με το δάπεδο. Η τάβλα και το σώμα (3) ισορροπούν . Στις κατακόρυφες που διέρχονται από τα άκρα της τάβλας και σε ύψος h από αυτή, κρατάμε δύο ίδια, μικρά σώματα (1), (2) που έχουν μάζα m/2 το καθένα. Αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα (1),(2). Τα σώματα συγκρούονται ελαστικά με τα άκρα της τάβλας, Η τάβλα είναι ομογενής.



Αν το πλάτος ταλάντωσης της τάβλας μετά την κρούση είναι Α= 0,2m ,η μάζα m=1Kg , η σταθερά του ελατηρίου k= 100 N/m και $\pi^2 = 10$ να βρείτε:

α) Το ύψος h

β) Τις ταχύτητες των σωμάτων (1),(2),(3) τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της τάβλας.

γ) Την υψομετρική διαφορά των θέσεων των σωμάτων (1),(2),(3) από τη θέση της τάβλας, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της τάβλας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α)Τα σώματα (1),(2) όταν φτάνουν στα άκρα της τάβλας έχουν ταχύτητες με μέτρα: $u_1=u_2=\sqrt{2gh}$.

Οι ελαστικές κρούσεις στα άκρα της τάβλας γίνονται με τις ίδιες συνθήκες με αποτέλεσμα οι αντίστοιχες δυνάμεις στα άκρα της τάβλας να είναι ίσες και κατακόρυφες κάθε χρονική στιγμή. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ταχύτητες των σωμάτων (1),(2) είναι ίσες κάθε χρονική στιγμή. Άρα και αμέσως μετά την κρούση $u'_1 = u'_2$. Η ταχύτητα του σώματος (3) (όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο θέμα) μετά την κρούση είναι μηδέν.

Εφαρμόζουμε κατακόρυφα την ΑΔΟ για την τάβλα και τα σώματα (1),(2).

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΔΟ :}\quad p_{\pi\rho\iota\nu.} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}.} \;\Rightarrow\; 2\frac{m}{2}u_1 = \frac{m}{2}u_1' + \frac{m}{2}u_1' + mu_4 \;\Rightarrow\; u_1 = u_1' + u_4 \\ \text{Εφαρμόζουμε την ΑΔΚΕ λόγω ελαστικής κρούσης.} \\ \text{ΑΔΚΕ :}\quad K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \;\Rightarrow\; 2\frac{1}{2}\frac{m}{2}u_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}u_1'^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}u_1'^2 + \frac{1}{2}mu_4^2 \;\Rightarrow\; u_1^2 = u_1'^2 + u_4^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_1' + u_4 \\ \\ u_1 + u_1' = u_4 \end{array}\right] \Rightarrow \quad u'_1 = 0 \quad \text{και} \quad u_4 = u_1 \qquad \text{Ανταλλαγή ταχυτήτων:} \qquad (1)$$

.

Η $ΘΙ_1$ της τάβλας και του σώματος (3) από το ΦΜ του ελατηρίου πριν την κρούση είναι:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; kx_1 = 2mg \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{2mg}{k} = 0{,}2\ \text{m} \qquad (2)$$

Η $ΘΙ_2$ της τάβλας από το ΦΜ μετά την κρούση είναι:

$$\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; kx_2 = mg \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{mg}{k} = 0{,}1\ \text{m} \qquad (3)$$

Η $ΘΙ_2$ είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης της τάβλας.

Άρα λόγω των σχέσεων (1,),(2),(3) στην απομάκρυνση $x= x_1 – x_2 = 0{,}1m$ η τάβλα έχει ταχύτητα

$u_4 = \sqrt{2gh}$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ ταλάντωσης από την απομάκρυνση x μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα της τάβλας , δηλαδή στην απομάκρυνση x=A.

$\frac{1}{2} m u_4^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$ => $u_4 = \sqrt{3}$ m/s (4)

Από τις σχέσεις (1) , (4) => $u_4 = \sqrt{2gh}$ => $\sqrt{3}= \sqrt{2gh}$ => $\boxed{h = 0{,}15m}$

β) Τα σώματα (1) ,(2), (3) μετά την κρούση κάνουν ελεύθερη πτώση από την ίδια χρονική στιγμή και το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της τάβλας, βρίσκεται από την εξίσωση της απομάκρυνσης.

$x = Aημ(ωt + φ_0)$ με $A=0{,}2m$, $ω=\sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s και για t=0 η x=0,1m με θετική την ταχύτητα προς τα κάτω : $ημφ_0 = \frac{1}{2}$ => $φ_0= \frac{\pi}{6}$ Άρα $x = 0{,}2ημ(10t +\frac{\pi}{6})$

Για $t=t_1$ η $x = A = 0{,}2m$: $0{,}2 = 0{,}2ημ(10t_1 +\frac{\pi}{6})$ => $ημ(10t_1 +\frac{\pi}{6}) = 1$

=> $10t_1 +\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (η μικρότερη γωνία) => $t_1 = \frac{\pi}{30}$ (5)

Οι ταχύτητες των σωμάτων (1),(2), (3) είναι: $u_{1,2,3} = gt_1$ με την (5) => $\boxed{u_{1,2,3} = \frac{\pi}{3} \text{ m/s}}$

γ) Η κατακόρυφες μετατοπίσεις των σωμάτων (1) ,(2), (3) από τη θέση της κρούσης είναι :

$ψ_{1,2,3} = \frac{1}{2} gt_1^2$ με την (5) => $ψ_{1,2,3} = = \frac{1}{2} 10 (\frac{\pi}{30})^2$ => $ψ_{1,2,3} = \frac{1}{18}$ m ($π^2=10$)

Επομένως $h_{(διαφ.)} = x - ψ_{1,2,3} = \frac{1}{10} - \frac{1}{18} = \frac{8}{180}$ m => $\boxed{h_{(διαφ.)} = \frac{2}{45} \text{ m}}$

pananasgiannis@yahoo.gr