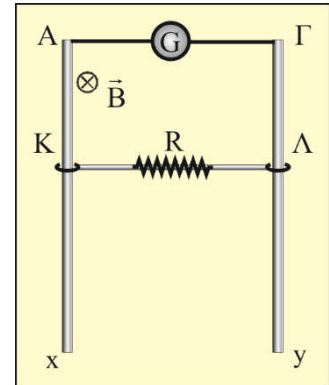


Μια ακόμη κατακόρυφη κίνηση ράβδου.

Η ράβδος ΚΛ μήκους $\ell = 1\text{ m}$, μάζας $m = 2\text{ kg}$ και ωμικής αντίστασης $R = 2\Omega$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, σε επαφή με τους λείους κατακόρυφους αγωγούς Αx και Γy παραμένοντας συνεχώς κάθετη σε αυτούς. Τα άκρα Α και Γ των αγωγών συνδέονται μέσω ενός βαλλιστικού γαλβανόμετρου. Το γαλβανόμετρο και οι αγωγοί Αx και Γy δεν παρουσιάζουν ωμική αντίσταση ενώ το μόνο τμήμα του συστήματος που μπορεί να κινείται είναι η ράβδος. Στο χώρο του συστήματος υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 2\text{ T}$, με οριζόντιες δυναμικές γραμμές και φορά όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ράβδος αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί, ενώ τη χρονική στιγμή t_{op} η ταχύτητα της σταθεροποιείται. Μέχρι τη χρονική στιγμή t_{op} έχει περάσει από το γαλβανόμετρο φορτίο $q = 40\text{ C}$.

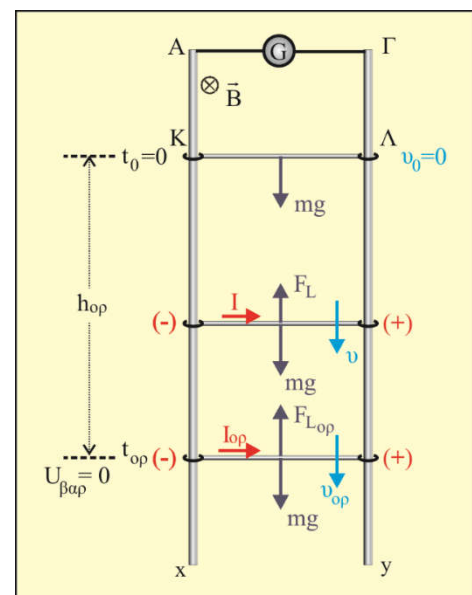


- Ποια η σταθερή ταχύτητα που αποκτά η ράβδος;
- Ποια η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_{op} ;
- Ποια η χρονική στιγμή t_{op} ;
- Αν από την αρχή του φαινομένου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,6\text{ s}$ έχει περάσει από το γαλβανόμετρο φορτίο $q_1 = 8\text{ C}$ να βρείτε:
 - Τις απώλειες μηχανικής ενέργειας του συστήματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 .
 - Τους ρυθμούς μεταβολής της δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας της ράβδου καθώς και το ρυθμό απωλειών λόγω φαινομένου Joule στο σύστημα τη χρονική στιγμή t_1 .

Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

- α) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η μόνη δύναμη που ασκείται στη ράβδο είναι το βάρος της, συνεπώς αρχίζει να κινείται επιταχυνόμενα προς τα κάτω. Την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή η ράβδος αποκτά ταχύτητα κατακόρυφη προς τα κάτω, με αποτέλεσμα η μαγνητική ροή στο πλαίσιο που ορίζουν οι αγωγοί να αυξάνεται. Συνεπώς αναπτύσσεται στη ράβδο ΗΕΔ από επαγωγή με αποτέλεσμα το σύστημα να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος πρέπει να είναι τέτοια ώστε το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε αυτό να τείνει να μειώσει τη μαγνητική ροή. Άρα η ράβδος πρέπει να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα από το Κ προς το Λ. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τον κανόνα των τριών δακτύλων καταλαβαίνουμε ότι στη ράβδο ασκείται δύναμη Laplace με φορά προς τα πάνω.



Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε και ως εξής:

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα οφείλεται σε επαγωγική πηγή άρα η φορά του θα είναι τέτοια ώστε να τείνει να αναιρέσει την αιτία που το προκάλεσε. Η αιτία αυτή είναι η επιταχυνόμενη προς τα κάτω κίνηση της ράβδου. Συνεπώς στη ράβδο ασκείται δύναμη Laplace κατακόρυφη προς τα πάνω. Με τη χρήση του κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε ότι η ράβδος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα με φορά από το σημείο Κ προς το σημείο Λ.

Η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας μια μικρή μετατόπιση της ράβδου (dx) σε χρονική διάρκεια (dt) στην οποία να μπορούμε να θεωρήσουμε αμετάβλητη την ταχύτητα της ράβδου:

$$E = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \Rightarrow E = \frac{|BdA|}{dt} \Rightarrow E = Bl \frac{|dx|}{dt} \Rightarrow E = B\ell v$$

Αρχικά η ταχύτητα της ράβδου είναι μικρή συνεπώς η δύναμη Laplace είναι μικρότερη από το βάρος της άρα αυτή επιταχύνεται προς τα κάτω.

Για τη συνισταμένη δύναμη στη ράβδο έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F = ma &\Rightarrow mg - F_L = ma \Rightarrow mg - B\ell v = ma \Rightarrow mg - B \frac{Bv\ell}{R_{ολ}} \ell = ma \Rightarrow \\ &\Rightarrow mg - \frac{B^2 \ell^2}{R} v = ma \quad (1) \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι κατά την κίνηση της ράβδου η επιτάχυνση της ελαττώνεται. Τη στιγμή (t_{op}) που η επιτάχυνση μηδενίζεται η ράβδος αποκτά την οριακή της ταχύτητα.

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow mg - \frac{B^2 \ell^2}{R} v_{op} = 0 \Rightarrow v_{op} = \frac{mgR}{B^2 \ell^2} \Rightarrow v_{op} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 2}{2^2 \cdot 1^2} \Rightarrow v_{op} = 10 \frac{m}{s}.$$

- β)** Η ράβδος από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή t_{op} μετακινήθηκε προς τα κάτω κατά h_{op} . Συνεπώς η μαγνητική ροή μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta A \Rightarrow \Delta\Phi = B \cdot \ell \cdot h_{op}$$

Συνεπώς από το νόμο του Neumann:

$$q = \frac{|\Delta\Phi|}{R_{ολ}} N \Rightarrow q = \frac{\Delta\Phi}{R} \Rightarrow q = \frac{B \cdot \ell \cdot h_{op}}{R} \Rightarrow h_{op} = \frac{q \cdot R}{B \cdot \ell} \Rightarrow h_{op} = \frac{40 \cdot 2}{2 \cdot 1} \Rightarrow h_{op} = 40m$$

Εφαρμόζοντας ΑΔΕ για τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και t_{op} παίρνουμε:

$$\begin{aligned} K_0 + U_0 + E_{προσφ} &= K_{op} + U_{op} + E_{απωλ} \Rightarrow 0 + mgh_{op} + 0 = \frac{1}{2}mv_{op}^2 + 0 + E_{απωλ} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{απωλ} = mgh_{op} - \frac{1}{2}mv_{op}^2 \Rightarrow E_{απωλ} = 2 \cdot 10 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 \Rightarrow E_{απωλ} = 700J \end{aligned}$$

Σχόλιο: Το έργο της δύναμης Laplace που ασκείται στη ράβδο είναι ίσο με την ηλεκτρική ενέργεια που προσφέρει στο κύκλωμα η επαγωγική πηγή άρα ίσο και με τις απώλειες θερμότητας λόγω φαινομένου Joule

στην ωμική αντίσταση της ράβδου.

$$|W_{F_L}| = \sum |dW_{F_L}| = \sum |-F_L \cdot dx| = \sum (BI\ell \cdot v \cdot dt) = \sum (Bv\ell \cdot I \cdot dt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |W_{F_L}| = \sum E_{\varepsilon\pi} \cdot I \cdot dt \Rightarrow |W_{F_L}| = W_{\eta\lambda} = Q_R$$

γ) Εφαρμόζοντας το 2^ο Νόμο του Newton έχουμε:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = \Sigma F \cdot dt \Rightarrow dp = (mg - F_L)dt \Rightarrow \sum dp = \sum (mg - F_L)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sum mg \cdot dt - \sum F_L \cdot dt \Rightarrow \Delta p = \sum mg \cdot dt - \sum BI\ell \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = mg \sum dt - B\ell \sum I \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = mg \cdot \Delta t - B\ell q \quad (2)$$

$$\text{Από την } (2) \Rightarrow mv_{op} - 0 = mg(t_{op} - 0) - B\ell q \Rightarrow 2 \cdot 10 = 2 \cdot 10 \cdot t_{op} - 2 \cdot 1 \cdot 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{op} = 5s$$

δ) Από το νόμο του Neumann:

$$q_1 = \frac{|\Delta\Phi|}{R_{o\lambda}} N \Rightarrow q_1 = \frac{\Delta\Phi}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{B \cdot \ell \cdot h_1}{R} \Rightarrow h_1 = \frac{q_1 \cdot R}{B \cdot \ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{8 \cdot 2}{2 \cdot 1} \Rightarrow h_1 = 8m$$

$$(2) \Rightarrow mv_1 - 0 = mg(t_1 - 0) - B\ell q_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v_1 = 2 \cdot 10 \cdot 1,6 - 2 \cdot 1 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = 8 \text{ m/s}$$

i) Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ για τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 1,6s$ παίρνουμε:

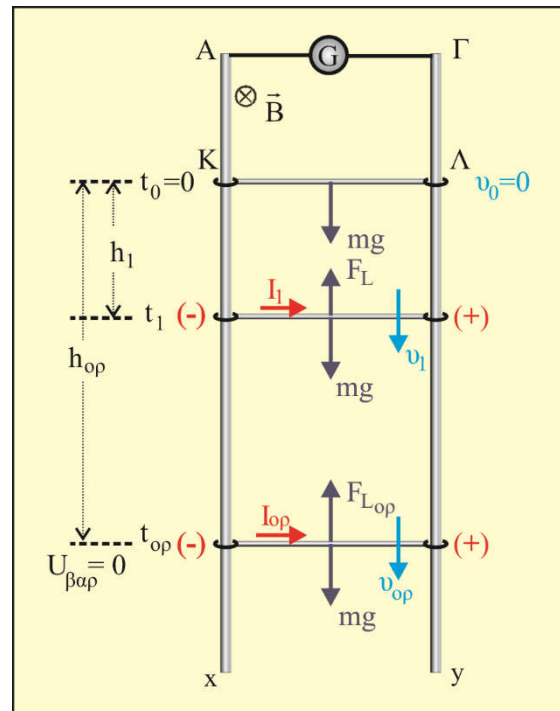
$$K_0 + U_0 + E_{\pi\rho\sigma\varphi} = K_1 + U_1 + E_{\alpha\pi\omega\lambda,1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + mgh_{op} + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(h_{op} - h_1) + E_{\alpha\pi\omega\lambda,1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda,1} = mgh_1 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 2 \cdot 10 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda} = 96J$$

ii) Τη στιγμή $t_1 = 1,6s$ η ταχύτητα έχει μέτρο $v_1 = 8 \text{ m/s}$ συνεπώς η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι:



$$I_1 = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_1 = \frac{Bv_1 \ell}{R} \Rightarrow I_1 = \frac{2 \cdot 8 \cdot 1}{2} \Rightarrow I_1 = 8A.$$

Άρα για τη δύναμη Laplace $F_{L_1} = BI\ell \Rightarrow F_{L_1} = 2 \cdot 8 \cdot 1 \Rightarrow F_{L_1} = 16N$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{mg}}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{mg \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mg \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -2 \cdot 10 \cdot 8 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -160 \frac{J}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dK}{dt} = (mg - F_{L_1})v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = (20 - 16)8 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 32 \frac{J}{s} \end{aligned}$$

Ο ρυθμός απωλειών λόγω φαινομένου Joule τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$P_R = I^2 R \Rightarrow P_R = 8^2 \cdot 2 \Rightarrow P_R = 128 \frac{J}{s}$$

Σχόλια:

$$1. \text{ Ισχύει: } P_R = I^2 R \Rightarrow P_R = I \cdot I \cdot R \Rightarrow P_R = E_{\text{επ}} I \Rightarrow P_R = Bv\ell I \Rightarrow P_R = BI\ell v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_R = F_L v \Rightarrow P_R = \left| \frac{dW_{F_L}}{dt} \right|$$

$$2. \text{ Η διατήρηση της ενέργειας επιβάλλει την ισότητα: } \left| \frac{dU}{dt} \right| = \frac{dK}{dt} + P_R$$

Πράγματι από την ΑΔΕ παίρνουμε:

$$E_{\mu\chi,\alpha} + E_{\pi\rho\sigma\phi} = E_{\mu\chi,\tau} + E_{\alpha\pi\omega\lambda} \Rightarrow K_\alpha + U_\alpha + 0 = K_\tau + U_\tau + |W_{F_L}| \Rightarrow$$

$$U_\alpha - U_\tau = K_\tau - K_\alpha + |W_{F_L}| \Rightarrow -\Delta U = \Delta K + P_R$$

Υλικά Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Πάλμος Δημήτρης