

*Apéndice***UN BREVE ESBOZO SOBRE LA ARITMETICA**

Jorge Castro Briones

El concepto de número, tan familiar para nosotros, se elaboró muy lentamente. Nos podemos formar un juicio sobre lo anterior, si se toma en cuenta cómo contaban aquellas pueblos que todavía hace poco tiempo se hallaban en diversos grados de un régimen primitivo-comunal. En algunos de tales pueblos no existían aún nombres para los números mayores que el dos o el tres; en otros, el cantar se prolongaba un paco más, pero en una forma o en otra éste finalizaba, comparativamente, de manera rápida, y sobre el número en general dichos pueblos decían simplemente, "mucho" a "innumerable". Esto muestra que la asimilación por los hombres de números claramente distintos, se llevó a cabo gradualmente.

Al principio los hombres no poseían el concepto de número, aunque podían, a su manera, opinar sobre las dimensiones de uno u otro conjunto de objetos que encontraban en su práctica. Es necesario considerar que el número era percibido por ellos directamente como una propiedad inalienable de un conjunto de objetos, propiedad que sin embargo, aún no descubrían claramente. Nosotros estamos a tal grado habituados a contar, que es poco probable que nos podamos representar esto; sin, embargo, lo comprendemos.

En un grado más alto, el número se muestra ya como una propiedad de un conjunto de objetos, pero aún no se separa de él como "número abstracto", como el número en general, no relacionado con objetos concretos. Esto es evidente en virtud de la existencia en ciertos pueblos, de nombres de números tales como "mano" para el cinco, "todo el hombre" para el veinte, etc. Aquí el cinco se entiende no abstractamente, sino en el sentido de "tanto, como dedos haya en la mano"; el veinte "tanto, como todos los dedos del hombre", etc. En forma completamente análoga, en ciertos pueblos no existían, por ejemplo, los conceptos "negro", "sólido", "redondo". Para indicar que un objeto era negro, lo comparaban, supongamos, con un cuervo, y para indicar que se tenían cinco objetos, comparaban directamente dichos objetos con la mano. Ocurrió precisamente de manera que diferentes nombres de números se empleaban para diversos géneros de objetos: unos números para contar hombres, otros para contar barcas y así sucesivamente hasta diez clases diferentes de números. Aquí no hay números abstractos, puesto que se presentan como "concretos" que se relacionan a un determinado género de objetos. En otros pueblos, en general, no existen nombres especiales para los números; por ejemplo, no existe la palabra "tres" aunque ellos pueden decir: "tres hombres", "en tres lugares", etc.

Análogamente a esto, con facilidad decimos que este u otro objeto son negros, pero muy raramente hablamos sobre la "negrura" en sí, ya que éste es un concepto que se muestra más abstracto.

En relación con lo anterior conviene observar que, en la formación de los conceptos sobre las propiedades de los objetos, sea el color o la numerabilidad de un conjunto, se pueden distinguir tres grados, los cuales además, no es posible delimitar estrictamente. En el primer grado la propiedad se determina por una comparación directa de objetos: igual como el cuervo; tanto, como en la mano. En el segundo grado aparece el adjetivo: la piedra negra, y análogamente el numeral cinco árboles, etc. En el tercer grado la propiedad se abstrae de los objetos y puede figurar "como tal", como "negrura", como el número abstracto "cinco", etcétera.

Para poder descubrir y separar claramente esta propiedad general, es decir, para formar el concepto sobre uno u otro número y darle el nombre "seis", "diez", etc., fue necesario comparar entre sí muchos conjuntos de objetos. Los hombres contaron en el transcurso de largas

generaciones repitiendo millones de veces una y la misma operación. De ese modo, en la práctica, descubrieron los números y las relaciones entre ellos.

Las operaciones con los números surgieron, a su vez, como la reflexión de las operaciones reales con los objetos concretos. Esto es patente también en los nombres de los números. Así, por ejemplo, entre ciertos indígenas el número "veintiséis" se pronuncia como "encima de dos decenas yo coloco un seis". Es claro que aquí se refleja el método concreto de contar los objetos. Tanto más claro es, que la adición de números corresponde a la suma, a la unión de dos o varios conjuntos en uno. Igualmente, es fácil ver el significado concreto de la sustracción, de la multiplicación y de la división (la multiplicación en particular, parece tener su origen principalmente en la necesidad de contar conjuntos iguales: 2 veces, 2 veces, etc.)

Los hombres descubrieron y asimilaron, en el proceso de contar, no solamente relaciones entre números particulares, como por ejemplo, que dos y tres son cinco, sino establecieron también gradualmente, leyes generales. En la práctica descubrieron que la suma no depende del orden de los sumandos, o que el resultado de contar objetos dados no depende del orden en que se efectúe dicha cuenta. (Esta última circunstancia encuentra expresión en la coincidencia de los números "ordinales" y "cardinales": primero, segundo, etc., y uno, dos, etc.). En esta forma, los números aparecieron, no como aislados e independientes, sino en relación unos con otros.

Unos números se expresan por medio de otros, tanto en los nombres como en la escritura. Así 32 denota "treinta y dos", en francés 90 representa "cuatro veintes y diez (quatre-vingt-dix)" y, por ejemplo, las cifras romanas VIII, IX denotan que $8 = 5 + 3$, $9 = 10 - 1$.

En general, surgieron no simplemente números particulares, sino un sistema de números con sus relaciones y leyes.

El objeto de la aritmética lo constituye, precisamente, el sistema de números con sus relaciones y leyes. (*Históricamente la palabra "aritmética" procede del griego "arte del contar" de "aritmos": número y "texne": arte*). Un número abstracto aislado, no tiene en sí propiedades ricas en contenido, y es poco lo que puede decirse acerca de él, si nos preguntamos, por ejemplo, acerca de las propiedades del número 6, observamos que $6 = 5 + 1$, que $6 = 3 \times 2$, que 6 es un divisor de 30, etc. Pero en todos los casos el número 6 se relaciona con otros números, de suerte que las propiedades de un número dado se manifiestan precisamente, en su relación con otros números. Tanto más claro es, que toda operación aritmética determina una liga, o en otras palabras, una relación entre números.

En esta forma, la aritmética tiene que ver con las relaciones entre números. Pero las relaciones entre números son formas abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre los conjuntos de objetos, razón por la cual se puede decir que: La Aritmética es la ciencia que trata sobre las relaciones cuantitativas reales, consideradas sin embargo, abstractamente o, como se dice, en forma pura.

Como vemos, la aritmética no procede del pensamiento puro, según pretenden hacer creer los idealistas, sino que refleja determinadas propiedades de las cosas reales: ella ha surgido como resultado de una larga experiencia práctica de numerosas generaciones.

Cuanto más vasta y compleja se hace la práctica social, tanto más amplios son los problemas que se plantea. Ha sido necesario, no sólo registrar la cantidad de objetos y cambiarla por el pensamiento de su número, lo que ya requería de la formación del concepto de número y de los nombres de los números, sino además, aprender a contar todos los grandes conjuntos (sean animales en manadas, objetos en el trueque, días hasta un plazo señalado, etc.), fijar, y transmitir otros resultados del contar, lo que justamente requirió también el perfeccionamiento de los nombres, y posteriormente el de las notaciones de los números.

La introducción de las notaciones para los números, que principia

aparentemente desde el propio nacimiento de la lengua escrita, ha jugado un inmenso papel en el desarrollo de la aritmética. Además, éste fue el primer paso hacia los signos y las fórmulas matemáticas en general. El siguiente paso, que consistió en la introducción de los signos para las operaciones aritméticas y la notación literal (x) para la incógnita, fue efectuado mucho después. El concepto de número, como todo concepto abstracto, no tiene una imagen directa, no es posible representarle, y sólo se puede pensar. Pero el pensamiento se formula en el lenguaje, por lo que sin nombres no existen conceptos. La notación es el mismo nombre, sólo que no sonoro, sino escrito, y reproduce al pensamiento en forma de una imagen visual. Por ejemplo, si yo digo "siete" ¿qué se representa Ud.? Probablemente no siete objetos cualesquiera, sino ante todo la cifra "7"; ésta sirve, precisamente, de cubierta material para el número abstracto "siete". Y un número como por ejemplo, 18273, es visiblemente más difícil de pronunciar que de escribir, y es ya completamente imposible representarlo, con total exactitud, en forma de un conjunto de objetos. De esta manera, las notaciones ayudaron a crear el concepto sobre aquellos números que ya no es posible descubrir en la simple observación y en el acto directo de contar. En esto estaba la necesidad práctica: con la aparición del estado fue necesario recaudar impuestos, reunir y suministrar tropas, etc., lo que requería operaciones con números muy grandes.

Así, en primer lugar, el papel de las notaciones para los números consiste en que ellas dan una encarnación sencilla del concepto de número abstracto. (Vale la pena observar que el concepto sobre los números, que como hemos visto se elaboró con tan gran trabajo durante un tiempo excesivamente largo, es comprendido ahora por un niño de una manera comparativamente fácil. ¿Por qué? En primer lugar, naturalmente, porque el niño oye y ve cómo los adultos utilizan constantemente los números e inclusive le enseñan eso. Y en segundo lugar, porque -y precisamente sobre esto deseamos llamar la atención, el niño tiene palabras y notaciones hechas para los números. El, al principio, estudia estas formas exteriores del número, y después estudia ya su significado.) Tal papel de las notaciones matemáticas es general: suministran una personificación de los conceptos matemáticos abstractos. En esta forma, $+$ significa adición, a un número desconocido, a cualquier número dado, etc. En segundo lugar, las notaciones de los números dan la posibilidad de efectuar, en una forma particularmente sencilla, las operaciones con ellos. Todos saben hasta qué punto es más fácil "calcular sobre el papel" que "en la mente". Igual valor tienen los sitios y fórmulas matemáticas en general: permiten substituir parte de los razonamientos de los cálculos haciéndolos casi mecánicos. Con respecto a eso mismo, si el cálculo está escrito, posee ya una determinada seguridad. Allí todo es evidente, todo se puede comprobar, todo se determina por reglas exactas. Como ejemplo puede recordarse la adición "por columnas" o cualquier transformación algebraica como por ejemplo, "el traslado al otro miembro de la igualdad se efectúa por el cambio de signo".

De lo señalado es claro que sin notaciones convenientes para los números, la aritmética no habría podido avanzar mucho en su desarrollo. Tanto más que la matemática moderna sería sencillamente imposible sin los signos y fórmulas especiales.

Por sí mismo es comprensible la imposibilidad de que los hombres hayan podido producir, en un momento dado, el tan conveniente método moderno de escritura de los números. Desde los tiempos antiguos, en los diversos pueblos con rudimentos de cultura, aparecieron diferentes notaciones numéricas poco parecidas, a nuestras notaciones modernas, no sólo por lo que al trazado de los signos se refiere, sino también en cuanto a los principios; por ejemplo, no en todas partes se empleaba el sistema decimal (entre los antiguos babilonios existía un sistema decimal y sexagesimal mixto). En la tabla adjunta se muestran, en calidad de ejemplo, algunas de las notaciones de los números en diversos pueblos. En particular, vemos que los antiguos griegos, y posteriormente también los rusos, utilizaron notaciones alfabéticas. Nuestras cifras "arábigas"

modernas, y en general el método de escritura de los números, procede de la India, de donde fue llevado por los árabes a Europa en el siglo X, en donde finalmente arraigó en el, transcurso de varios siglos.

La primera particularidad de nuestro sistema consiste en que es decimal. Pero dicha particularidad no es esencial, porque puede ser empleado con éxito digamos, un sistema duodecimal, introduciendo notaciones especiales para el diez y el once.

La principal particularidad de nuestro sistema de notaciones consiste en que es "posicional", es decir, en él una misma cifra tiene diferente valor en función del lugar que ocupa. Así, por ejemplo, en la notación 372 la cifra 3 representa el número de las centenas, y el 7 el número de las decenas. Tal procedimiento de escritura no sólo es breve y sencillo, sino que también facilita al extremo los cálculos. Las notaciones romanas son mucho menos convenientes el mismo número 372 en romano se escribe así: CCCLXXII, y el multiplicar grandes números escritos en romano, es totalmente inconveniente.

La escritura posicional de los números requiere que se distinga el orden vacío, pues de no ser así, entonces confundiríamos, por ejemplo, el trescientos uno y el treinta y uno. En el lugar del orden vacío se coloca un cero; en esta forma diferenciamos 301 y 31. El cero aparece ya en forma rudimentaria, en las tardías escrituras cuneiformes babilónicas. La introducción sistemática del cero fue un logro de los hindúes. *(El primer manuscrito hindú en donde se halla el cero, se remonta al final del siglo IX; en él, la escritura del número 270 corresponde exactamente a la de nuestras notaciones. Sin embargo, probablemente el cero se introdujo en la India ya, anteriormente, en el siglo VI)*: esto permitió conducir hasta el final el sistema posicional de escritura de los números, el cual empleamos en la actualidad.

Pero aún hay más: el cero se hizo también un número, al penetrar en el sistema de los números. Por sí mismo, el cero es la nada, en lengua sánscrita (antiguo hindú) llama precisamente cunga "(vacío)", pero en relación con otros números, el cero adquiere contenido, gana propiedades conocidas, como aquella de que cualquier número más cero da el mismo número, y multiplicado por cero es cero.

En lo referente a la aritmética de los antiguos, se puede decir que los textos matemáticos más ancestrales de Babilonia y Egipto que han llegado hasta nosotros, se remontan al segundo milenio anterior a nuestra era. Ellos y los textos más tardíos, contienen diversos problemas aritméticos con resoluciones, inclusive algunos que hoy pertenecen al álgebra, como son las resoluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas y aún cúbicas o de progresiones (todo esto, naturalmente, sobre problemas concretas y ejemplos numéricos). De Babilonia han llegado también hasta nosotros, tabla de cuadrados, cubos, y números inversos. Existe la suposición de que allí ya se habían formado intereses matemáticos que no estaban relacionados directamente con problemas prácticos particulares.

En todo caso, en la Babilonia y el Egipto antiguos la aritmética estaba muy desarrollada. Pero no tenía aún el carácter de una teoría matemática de los números, sino más bien era un conjunto de reglas para el cálculo y la resolución de diferentes problemas. Por otra parte, así se enseña la aritmética en la escuela primaria actual, y así la conciben todos aquellos que no se dedican, en especial, a la matemática. Esto es completamente legítimo, pero sin embargo, en esta forma la aritmética aún no es una teoría matemática: en ella no existen teoremas generales sobre los números.

El paso a la aritmética teórica se efectuó en una forma gradual.

Las notaciones, como ya se dijo, dan la posibilidad de operar con los números grandes que ya no es posible representar claramente en forma de conjuntos de objetos, y hasta los cuales no es factible llegar contando de uno en uno a partir de la unidad. Si entre las tribus salvajes los

números se interrumpen en el 3, 10, 100, etc., y después sigue el indeterminado "muchos", las notaciones posibilitaron en China, Babilonia y Egipto, el avanzar más allá de las decenas de millares, e inclusive después del millón. Aquí ya se manifiesta la posibilidad de una prolongación ilimitada de la serie de números. Pero no fue comprendida con claridad inmediata, y no se sabe con certeza cuando ocurrió ello. Ya el gran matemático, físico e ingeniero griego Arquímedes (287 - 212 a.n.e.) quien anticipó genialmente algunas ideas y métodos de la matemática superior, en su célebre obra "Sobre el cálculo de la arena" indicó un método, para denominar a un número mayor que el número de granos de arena que podría caber en la "esfera de las estrellas fijas". La posibilidad de nombrar y escribir tal número, vale decir, aún requirió en ese tiempo una explicación detallada.

Hacia el siglo III antes de nuestra era, los griegos tenían ya plena conciencia de dos importantes ideas: en primer lugar, que la serie de los números se puede prolongar ilimitadamente, y en segundo lugar, que se puede operar, no sólo con cualesquiera números dados, sino también razonar sobre los números en general, formulando y demostrando teoremas generales sobre los mismos. Esto era una generalización de la enorme experiencia anterior en la operación con los números concretos. Con motivo de esta experiencia, aparecieron leyes generales y métodos de los razonamientos generales sobre los números. En estas condiciones se produjo el paso a un grado más alto de la abstracción: de números particulares dados (aunque también abstractos) al número en general, a cualquier posible número.

Del sencillo proceso de contar los objetos uno por uno, pasamos a la noción acerca del proceso ilimitado de formación de los números, por medio de la adición de la unidad a un número construido anteriormente. La serie de los números se piensa ya como prolongación ilimitada, y con ello entra el infinito a la matemática. Naturalmente, de hecho, no podemos penetrar tan lejos como fuera deseable en la serie de los números por medio de la adición de unidades: ¿quién puede contar hasta un millón de millones, si inclusive cien años contienen casi 40 veces menos segundos? Pero esta no es la cuestión. El proceso de acumulamiento de unidades, el proceso de formación de cuantos grandes conjuntos de objetos fueran deseables, no está fundamentalmente limitado y, vale decir, es una posibilidad potencial de la prolongación ilimitada de la serie numérica. Los teoremas generales sobre los números tocan ya esta serie mencionada.

Los teoremas generales sobre cualquier propiedad de todo número, ya contienen en forma implícita afirmaciones sobre las propiedades de los números particulares, y son ricos en aseveraciones específicas que pueden verificarse para los números aislados. Por tal motivo, los teoremas generales deben demostrarse por medio de razonamientos generales que partan de la propia ley de formación de la serie numérica. Aquí se revela una profunda particularidad de la matemática: ella tiene como objetivo, no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino en general, las relaciones cuantitativas posibles y, vale decir, el infinito.

En esta forma la aritmética se convierte en la teoría de los números. Esta se abstrae ya de los problemas particulares concretos, y se enfoca hacia el dominio de los conceptos y razonamientos abstractos, convirtiéndose con ello, en rama de la matemática "pura". Más exactamente este fue también el momento del nacimiento de la matemática pura con todas sus particularidades (su carácter abstracto, su gran rigorismo, su amplia aplicación en otras ciencias y en la técnica, etc.). Es necesario observar, por cierto, que la matemática pura nació simultáneamente, a partir de la aritmética y de la geometría. Además, en las reglas generales de la aritmética se tienen ya gérmenes del álgebra, la cual se separó posteriormente de aquella.

En la actualidad, el desenvolvimiento de la matemática en conjunto tiene gran influencia sobre el desarrollo de la aritmética y de las ciencias contiguas a ella, lo que se ha manifestado, por

ejemplo, en la construcción axiomática de la aritmética, es decir, en la sistematización de la misma sobre la base de un cierto número de axiomas.

Por otra parte, los procedimientos y métodos de cálculo utilizados en la aritmética, han obtenido un amplio desarrollo y aplicación en las técnicas matemáticas modernas de cálculo, lo cual queda evidenciado en las bases aritméticas de la forma de representación de los números, lo que involucra el estudio de los diversos sistemas de numeración, en las máquinas calculadoras numéricas electrónicas modernas.

Finalmente, por medio de una tabla cronológica trataremos de presentar un esquema histórico del desarrollo, en especial, de la aritmética, así como de algunas ramas contiguas a la misma y de diversos aspectos del desenvolvimiento de la técnica que, en forma directa o indirecta, contribuyeron a la aparición de los números, de las relaciones entre ellos y como resultado de esto, a la creación de la aritmética ya con los rasgos característicos de una ciencia matemática. Debe mencionarse que la formación de "la tabla cronológica debe, en gran medida a la labor ingente de recopilación y ordenamiento del Sr. Alfonso Linares F., que es Egresado (*egresado, -da. m., f. Amér. Persona que sale de un establecimiento docente después de haber terminado sus estudios.*) de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional (*nota del traductor y autor del Breve Esbozo...*)

	Esclavo		Chino			Griego	Arabe	Georgiano	Egipcio		Romano	Cifras de los Mayas
	Cirílico	Glagólico	Antiguo	Comercial	Científico				Jeroglíficos	Hierático		
0				0	0							—
1	1	1	一	1	1	α	1	1	1	1	1	.
2	2	2	二	2	2	β	2	2	2	2	2	..
3	3	3	三	3	3	γ	3	3	3	3	3	...
4	4	4	四	4	4	δ	4	4	4	4	4
5	5	5	五	5	5	ε	5	5	5	5	5	—
6	6	6	六	6	6	ς	6	6	6	6	6	—
7	7	7	七	7	7	ζ	7	7	7	7	7	—
8	8	8	八	8	8	η	8	8	8	8	8	—
9	9	9	九	9	9	θ	9	9	9	9	9	—
10	10	10	十	10	10	ι	10	10	10	10	10	—
20	20	20	二十	20	20	κ	20	20	20	20	20	—
30	30	30	三十	30	30	λ	30	30	30	30	30	—
100	100	100	百	100	100	μ	100	100	100	100	100	—
1000	1000	1000	千	1000	1000	ν	1000	1000	1000	1000	1000	—

Tabla 1. Notaciones de los números en los diversos pueblos.

Tabla tomada del artículo de I. G. Bashmakov y A. P. Iushkievich "Origen de los Sistemas de Numeración (Enciclopedia de la Matemática Fundamental)Tomo I, Moscú, 1951

TABLA CRONOLOGICA DEL DESARROLLO DE LA ARITMETICA

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
	Primitivos (edad de piedra)		Primeras representaciones del mundo real: tallado, grabados y técnicas de construcción: desde las armas sencillas hasta las complejas, utensilios. Sistemas de numeración rudimentarios (sin simbolismo)
¿ ?-2500 a.n.e.	Egipto		Sistema numérico simbólico
2500-1800 a.n.e.	Babilonia, Sumeria, Egipto, Creta		Contactos de babilonios y sumerios. Tablas matemáticas babilónicas que contienen: cuadrados, cubos, inversos, y tablas de multiplicación de números. Origen del contenido del papiro Rhind. Uso del número π por los babilonios ($\pi=3$). Sistemas de medidas, longitudes, peso, capacidad, sistemas de numeración más desarrollados
1800-1400 a.n.e.	Egipto, Grecia, Creta, Sumeria	Ahmes (sacerdote egipcio), en el texto de Perelman: Ajmes	Papiro Rhind de Egipto. Primera época de contacto de los pueblos egipcio, griego, sumerio
1400-1200 a.n.e.	Egipto, Grecia		Período guerrero y predominio griego
1200-1000 a.n.e.	Grecia, Egipto		Formación de los estados griegos y decadencia de Egipto
1000-550 a.n.e.	Grecia	Tales de Mileto	Teorema de Tales, desarrollo de problemas geométricos con aplicaciones (predicción de un eclipse). Contacto de las culturas griega y oriental
550-000 a.n.e.	Grecia	Pitágoras de Samos y la Escuela de Crotona	Se adquiere en toda su pureza el concepto de número y se descubren los irracionales por medio de un caso particular del célebre Teorema de Pitágoras.
		Parménides de Elea y la Escuela de Elea	Introduce el razonamiento en un primer intento de rigorismo lógico

Tabla 2.

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
500-000 a.n.e	Grecia	Zenón de Elea (Eleatas)	Crítica a Pitágoras y como resultado se elimina el infinito de la matemática griega
		Jenófanes de Colofón (Eleata)	Introduce la crítica en la elaboración científica
		Platón (La Academia)	Estudios en todos los campos del pensamiento (Filosofía)
		Eudoxio de Cnido	Teoría general de las proporciones (commensurables o no) hoy llamada "Método de exhaustión"
		Aristóteles (Liceo)	Continúa el estudio en todos los campos del pensamiento (creación de la Lógica)
		Eudemo de Rodas	Historiador de las Matemáticas
	Grecia	Eucledes de Alejandría	Reunión de los conocimientos matemáticos griegos ("Elementos"): Libro V: Teoría de las Proporciones; Libros VII, VIII y IX: Teoría de los Números o Aritmética: divisibilidad, descomposición en factores primos, proporciones y progresiones geométricas, números perfectos puros; Libro X: números irracionales. Ya se tiene organizada la Aritmética como una rama de las Matemáticas
		Arquimedes de Siracusa	Se desliga a la Matemática de la Filosofía para aplicarla a problemas prácticos variados. Intento de representación simbólica de los grandes números.
	China	Chu Shing	Una solución del problema de los volúmenes de los cuerpos de revolución (el de un cono y el de un cilindro) (ver volúmenes de los cuerpos de revolución)
		Chu Shing	Desarrollo de una tabla de multiplicación para construir una tabla de números (ver volúmenes de los cuerpos de revolución)

Tabla 3

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
550-000 a.n.e		Apolonio de Parga Herón de Alejandría	Tratamiento de las secciones cónicas en forma exhaustiva en su obra "Cónicas" Agregados y perfeccionamientos a los "Elementos" de Euclides
000-1500 n.e.	China		Obra sobre Aritmética, "Chin-Chang": invención del ábaco para calcular; solución de problemas aritméticos; cuadrados mágicos.
	Grecia	Nicomaco de Gerasa	Glosa y comentario en su obra "Introducción a la Aritmética", que sirvió para la enseñanza en la Edad Media.
		Menelao de Alejandría	Culminación de la Geometría griega y aparición del triángulo esférico.
		Pappus de Alejandría	Resumen de los conocimientos matemáticos anteriores en su obra "Colección Matemática". Tiene gran valor por sus informaciones históricas y bibliográficas de la Matemática griega.
		Diofanto de Alejandría	Primeros esbozos del Álgebra en su obra "Aritmética"; estudio de una gran variedad de problemas vinculados algunos con el "Análisis Indeterminado"; simbolización de operaciones, incógnitas y exponentes. (Un problema famoso en la Teoría de los Números: $x^2 + y^2 = z^2$).
	India	Aryabhata Brahmagunta Bhaskara	Funciones circulares y Análisis Indeterminado aproximado al actual. Análisis Indeterminado Simbolización algebraica y notación del sistema de numeración posicional de base 10. Su obra "Aritmética" traducida al latín difundió los

Tabla 4

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
000-1500	Arabia	Al-Khuwarizmi	cifras hindúes y el 0; su obra "Sobre el Cálculo mediante la Restauración y la Reducción" es el primer tratado sobre el Álgebra.
		Thabit b. Qurra	Traducciones y métodos para encontrar números amigos.
		Al-Mahani y Abu Kamil	Tratamiento de los problemas geométricos por medio del Álgebra.
		Italianos y Españoles	Trabajos de traducción de las obras griegas y árabes: se fundan escuelas de traducción (Toledo).
	Francia	Nicolás Oresme	Primeras manifestaciones de la representación gráfica de funciones.
	Italia	Leonardo Pisano	Introducción del símbolo a — (1202). b
	Alemania	Johann Widmann	Introducción de los símbolos $+$ y $-$ (1489)
	Alemania	Gutenberg	Su invención de la imprenta con tipos móviles da lugar a una divulgación en gran escala del pensamiento humano.
1500-1600	Italia	Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli	Contribuciones al Álgebra propiamente dicha. Invención de los números imaginarios (Bombelli).
		John Napier	Invención de los logaritmos: naturales (Napier)
	Suiza	Jobst Bürgi	Bürgi): decimales (Briggs).
	Inglaterra	Henry Briggs	
	Francia e Italia	Francois Viete, A. Rheticus, Francesco Maurolyco, Guidubaldo del Monte	Llevar al Álgebra, a la Geometría y a la Trigonometría a un estado de madurez. Se estudian las series y se investiga la naturaleza del número "pi".
	Alemania	J. Rudolf	Introducción del símbolo $(\sqrt{\quad})$ (1525).
	Inglaterra	Robert Recorde	Introducción del símbolo de igualdad $(=)$ (1557).

Tabla 5