Capítulo Cuarto
SISTEMAS NO-DECIMALES DE NUMERACION

Contenido:

1. Autobiografía enigmática
Me permito iniciar este capítulo con un problema que yo imaginé hace tiempo para los lectores de una antigua revista de gran difusión[1], en calidad de "problema con premio". Helo aquí:

En los papeles de un matemático original fue hallada su autobiografía. Esta empezaba con las siguientes líneas:
"Acabé el curso de la universidad a los 44 años de edad. Pasó un año y siendo un joven de 100 años, me casé con una muchacha de 34 años".
"La insignificante diferencia de edades, sólo 11 años- que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 10 niños. Yo obtenía en total, al mes, 200 rublos, de los cuales, 1/10 parte se consagraba a mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 130 rublos al mes", y así sucesivamente.

¿Qué aclara las extraña contradicciones en los números de este fragmento?
La resolución del problema se sugiere por el nombre de este capítulo: un sistema no decimal de numeración; he aquí la causa singular, de las aparentes contradicciones de los números citados. Procediendo sobre la base de este pensamiento, no es difícil darse cuenta del sistema de numeración en que están representados los números del original matemático. El secreto se releva por la frase: "después de un año (luego de los 44 años de edad) como un hombre joven de 100 años"...; si a partir de la adición de una unidad el número 44 se transforma en 100, significa que la cifra 4 es la mayor en este sistema (como el 9 lo es en el decimal), y por consiguiente, la base del sistema es el 5. Al excéntrico matemático se le ocurrió la fantasía de escribir todos los números de su biografía en el sistema quinario[2] de numeración, es decir, aquel en el cual la unidad de un orden superior no es 10 veces, sino 5 veces mayor que la unidad de un orden inmediato inferior: en el primer lugar de la derecha se hallan, en él, las unidades simples (no mayores que el cuatro), en el segundo, no las decenas, sino las "quinarias"; en el tercero no las centenas, sino las "vigesimoquinarias" y así sucesivamente. Por tal razón, el número "44" representado en el texto de la escritura denota, no 4 x 10 + 4, como en el sistema decimal sino 4 x 5 + 4, es decir, veinticuatro. En la misma forma, el número "100" en la autobiografía representa

[1] "La naturaleza y los hombres".
[2] El sistema quinario de numeración tiene cinco cifras básicas (0,1,2,3, y 4) y se caracteriza porque el número 5 es ya un número de dos cifras, que se representa por, la unidad en el orden de las "quinarias" y, el cero en el orden de las unidades, (N. del T.)

una unidad de tercer orden en el sistema quinario, es decir, 25. Los restantes números de la escritura denotan correspondientemente[3]:

"34"	= 3 × 5 + 4	= 19
"11"	= 5 + 1	= 6
“200”	= 2 × 25	= 50
“10”	= 5	= 5
“1/10”	= 1/5	= 1/5
“1.130”	= 25 + 3 * 5	= 40

Restituyendo el significado verdadero de los números de la escritura, vemos que en ellos no existen contradicciones de ningún tipo.
"Acabé mis estudios en la universidad a los 24 años. Después de un año, siendo un joven de 25 años, me casé con una muchacha de 19 años. La insignificante diferencia de edades, 6 años, que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 5 niños. De salario percibía en total, al mes, 50 rublos, de los cuales 1/5 parte la empleaba mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 40 rublos al mes".

¿Es difícil representar los números en otros sistemas de numeración? En absoluto. Supongamos que se desea representar el número 119 en el sistema quinario. Se divide 119 entre 5, para saber cuántas unidades de primer orden caben en él:

119 : 5 = 23, residuo 4.

Lo que significa que el número de unidades simples será 4. Además, 23 "quinarias" no pueden estar totalmente en el segundo orden, puesto que la cifra mayor en el sistema quinario es el cuatro, y unidades más grandes que cuatro no pueden existir en un solo orden. Luego, dividamos 23 entre 5:

23 : 5 = 4, residuo 3.

Esto muestra que en el segundo orden ("de los cincos") estará la cifra 3, y en el tercero ("de los veinticincos") el 4.
Así, 119 = 4 × 25 + 3 × 5 + 4, o, en el sistema quinario "434".
Las operaciones realizadas, para comodidad, se disponen en la forma siguiente:

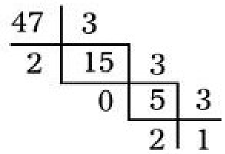
$$\begin{array}{r|l}
119 & 5 \\ \hline
4 & \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline 3 & 4 \end{array}
\end{array}$$

Cuadro 16

Las cifras en negritas (en la escritura se las puede subrayar) se escriben de derecha a izquierda y, simultáneamente, se obtiene la representación buscada, del número en otro sistema.
Pongamos aún otros ejemplos:

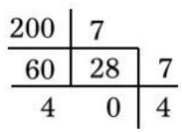
[3] De aquí en adelante, los números escritos en un sistema no decimal de numeración se ponen entre comillas.

Ejemplo 1: Representar 47 en el sistema ternario.
Resolución:


Cuadro 17

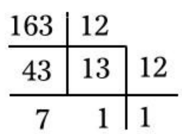
Respuesta: "1202".
Verificación: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

Ejemplo 2: Representar 200 en el sistema septenario.
Resolución:


Cuadro 18

Respuesta: "404".
Verificación: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$,

Ejemplo 3: Representar el número 163 en el sistema duodecimal:
Resolución:


Cuadro 19

Respuesta: "117".
Verificación: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Ahora el lector no tiene dificultad en representar cualquier número en un sistema de numeración deseado. El único obstáculo puede surgir, solamente, a consecuencia de que en ciertos casos no se encontraran notaciones para las cifras. En efecto, en la representación de números en sistemas con una base mayor que diez, por ejemplo, en el duodecimal puede presentar la necesidad en las cifras "diez" y "once". Fácilmente se sale de esta dificultad eligiendo, para las nuevas cifras, cualesquiera signos o letras condicionales, por ejemplo, las letras K y L que se hallan en los lugares 10° y 11° en el alfabeto ruso[4]. Así, el número 1579 en el sistema duodecimal[5] se representa en la forma siguiente:

[4] En el alfabeto español, los lugares 10º y 11º estás ocupados por las letras I y J. (N. del T.)
[5] En el sistema duodecimal las cifras básicas con: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, es necesario introducir dos nuevos símbolos para denotar las "cifras" diez y once. (N. del T).

```
1579 | 12
12     131  12
--     --------
 37     11  10
 --
  19
  --
   7
```

Cuadro 20

Respuesta: "(10) (11)7", o IJ7 (según el alfabeto castellano).
Verificación: 10 × 149 + 11 × 12 + 7 = 1579.

* * *

Problema 1: Escribir el número 1926 en el sistema duodecimal.[6]
Problema 2: Escribir el número 273 en el sistema duodecimal.
Volver

2. El sistema de numeración más sencillo.
Sin trabajo podemos notar que, en cada sistema, la mayor cifra que se utiliza es menor en una unidad que el número base del sistema. Así, en el sistema decimal, la mayor cifra es el 9; en el de base 6, el 5; en el ternario, el 2; en el de base l5, el 14, etc.
El sistema de numeración más sencillo es, naturalmente, aquel para el cual se requiere el menor número de cifras. En el sistema decimal son necesarias 10 cifras (considerando, también, al cero), en el quinario, 5 cifras, en e1 ternario, 3 cifras (0, 1 y 2), en el binario únicamente 2 cifras (1 y 0).
¿Existe un sistema "unitario"? Naturalmente: este sistema es aquel en el cual las unidades de todos los órdenes tienen idéntico valor. Este mismo "sistema" rudimentario lo empleaba el hombre primitivo, efectuando cortes en un árbol de acuerdo a1 número de objetos contados. Pero entre él y todos los otros sistemas de cálculo existe una enorme diferencia: carece de la principal ventaja de nuestra numeración (el llamado, valor posicional de las cifras). En efecto, en el sistema "unitario" un signo que se halle en el 3° ó 5° lugares, tiene el mismo valor que el que se encuentre en el primer lugar. Mientras que, aún en el sistema binario, la unidad en el 3er, lugar (desde la derecha) es ya 4 (2 × 2) veces mayor que en el 1er. lugar, y en el 5° lugar, 16 veces (2 × 2 × 2 × 2) mayor. Para la representación de cualquier número en el sistema "unitario" son necesarios exactamente tantos signos, como objetos sean contados: para escribir cien objetos, son necesarios cien signos: en el binario solamente siete ("1100100"); en el quinario, en total, tres ("400").
Es por esto que al sistema "unitario" es muy dudoso que se le pueda llamar "sistema"; por lo menos, no se le puede colocar junto a los restantes, puesto que se distingue fundamentalmente de ellos, en que no proporciona ninguna economía en la representación de los números. Si se le hace a un lado, entonces el sistema más sencillo de numeración resulta ser el sistema binario, en el que se emplean, en total, dos cifras: 1 y 0. ¡Por medio de la unidad y del cero se puede representar todo un conjunto infinito de números!
Para una numeración escrita y fija, este sistema es poco conveniente: se obtienen números excesivamente largos[7]. El sistema binario es muy a adecuado en una serie de investigaciones

[6] Las respuestas a los problemas están al final del libro. E indica: Resultado Problema 1: "1146"; Resultado Problema 2: "1109"

teóricas. En los últimos tiempos el papel del sistema binario ha tornado gran preponderancia, puesto que se halla en la base de la producción de cálculo, en las máquinas computadoras electrónicas. Dicho sistema posee ciertas interesantes particularidades inherentes que a propósito, se pueden emplear para la realización de una serie de trucos matemáticos efectivos, sobre los cuales hablaremos detalladamente en el capítulo "Trucos sin engaño".
Nos hemos habituado a tal grado a las operaciones aritméticas, que las efectuamos automáticamente, casi sin reflexionar en lo que hacemos. Pero las mismas operaciones exigen de nosotros gran esfuerzo si deseamos aplicarlas a números escritos en un sistema no decimal. Probemos, por ejemplo, efectuar la adición de los dos siguientes números, escritas conforme al sistema quinario.

"4203"
+"2132"

Sumemos conforme a los órdenes, empezando con las unidades, es decir, de la derecha: 3 + 2 es igual a cinco; pero no podemos escribir 5, porque tal cifra no existe en el sistema quinario; el cinco es ya una unidad de orden superior. Es decir, en la suma no hay unidades; escribimos 0, y el cinco, o sea, la unidad del siguiente orden, lo conservamos en la mente. Además, 0 + 3 = 3, más la unidad conservada en la mente, nos da en total 4 unidades de segundo orden. En el tercer orden obtenemos 2 + 1 = 3. En el cuarto, 4 + 2 es igual a seis, es decir, 5 + 1; escribimos 1, y al 5, o sea la unidad del orden superior- lo trasladamos más a la izquierda. La suma buscada = "11340":

"4203"
+"2132"
"11340"

Damos al lector la posibilidad de comprobar esta adición, trasladando, previamente, los números entre comillas al sistema decimal.
Exactamente igual se realizan también las otras operaciones. Como ejercicios, ofrecemos aún una serie de problemas[8] , cuyo número el lector puede aumentar por su cuenta, a voluntad:
En el sistema quinario:
Problema 3:

"2143"
–"334"

[7] En cambio como veremos después para tal sistema se simplifican al máximo las tablas de adición, de multiplicación.

[8] Las respuestas a los problemas se encuentran al final del libro.
Resultados:
Problema 3.-"1304".
Problema 4.- "1144".
Problema 5.-"2402".
Problema 6.-"2010".
Problema 7.-"10210".
Problema 8.-"110".
Problema 9.-"10" residuo "11".

Problema 4:

"213"
×"3"

Problema 5:

"42"
×"31"

En el sistema ternario:

Problema 6:

"212"
+"120"

Problema 7:

"122"
×"20"

Problema 8:

"220"
÷"2"

Problema 9:

"201"
÷"12"

En la realización de esa, operaciones, primero representamos mentalmente en nuestro familiar sistema decimal a los números escrito, y obtenido el resultado, de nuevo los representamos en el sistema no decimal deseado. Pero también se puede proceder en otra forma: constituir "la tabla de adición" y "la tabla de multiplicación" en aquellos sistemas en los que estén dados los números, y emplear directamente las tablas.
Por ejemplo, la tabla de adición en el sistema quinario tiene la siguiente forma:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Por medio de esta tabla podemos sumar los números "4203" y "2132", escritos en el sistema quinario, esforzando la atención mucho menos que con el método aplicado anteriormente.
Como es fácil comprender, la realización de la substracción también se simplifica.
Formemos la tabla de multiplicar ("pitagórica") para el sistema quinario:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Teniendo esta tabla ante los ojos, se puede reducir, en sí, el trabajo de la multiplicación (y de la división) de los números en el sistema quinario, como es fácil persuadirse, aplicándola a los arriba. Por ejemplo, en la multiplicación.

$$\begin{array}{r} "213" \\ \times "3" \\ \hline 1144 \end{array}$$

Razonamos así: tres por tres (de la tabla) da "14", escribimos 4 y conservamos en la mente el uno para el siguiente orden. Tres por uno, tres, mas uno del orden anterior, 4; de la tabla, 3×2 da "11", con lo que el resultado final será "1144".
Cuanto menor es la base de un sistema, tanto menores son, también, las correspondientes tablas de adición y de multiplicación. Por ejemplo, las dos tablas para el sistema ternario son:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla de la adición para el sistema ternario

1	2
2	11

Tabla pitagórica para el sistema ternario

Dichas tablas se pueden, simultáneamente, memorizar y emplear para la realización de las operaciones. Las tablas de adición y multiplicación más breves corresponden al sistema binario.

0	1
1	10

Tabla de la adición para el sistema binario

$$\boxed{1 \times 1 = 1}$$

Tabla de multiplicación para el sistema binario

¡Por medio de "tablas" tan sencillas se pueden efectuar, en el sistema binario, las cuatro operaciones! Las multiplicaciones en este sistema, como tales, en esencia no existen, pues multiplicar por la unidad equivale a dejar el número sin modificación; La multiplicación por "10", "100", "1000" (es decir, por 2, por 4, por 8) conduce a un sencillo agregado, a la derecha del correspondiente número de ceros. Por lo que toca a la adición, para su realización, es necesario recordar solamente que, en el sistema binario, 1 + 1 = 10.
¿No es cierto que nosotros, con una fundamentación completa, llamamos anteriormente al sistema binario el más sencillo de todos los posibles? La gran longitud de los números de esta aritmética singular, se compensa por la sencillez; de realización de todas las operaciones aritméticas con ellos.
Se desea, por ejemplo, multiplicar

$$
\begin{array}{r}
\text{"1001011101"} \\
\times\text{"100101"} \\
\hline
\text{"1001011101"} \\
+\text{"1001011101"}\cdot \\
\text{"1001011101"}\cdots\cdots \\
\hline
\text{"101011101110001"}
\end{array}
$$

La realización, de la operación conduce únicamente a una transcripción de los números dados en una disposición ordenada: esto requiere esfuerzos mentales comparativamente menores que la multiplicación de tales números, en el sistema decimal (605 × 37 = 22 385). Si fuera adaptado por nosotros el sistema binario, el estudio de la numeración escrita requeriría una mínima tensión mental (a cambio de una máxima cantidad de papel y tinta). Sin embargo, en la numeración oral la aritmética binaria, por lo que se refiere a la comodidad de realización de las operaciones, cede en gran medida, ante nuestro decimal.
Proporcionemos también un ejemplo de la operación de división efectuada en el sistema de numeración binario:

$$
\begin{array}{rll}
10000010 & :111 & =10010 \\
111\cdots\cdots\cdot & & \\
\hline
1001\cdots\cdot & & \\
111\cdots\cdot & & \\
\hline
100 & &
\end{array}
$$

En nuestro familiar sistema decimal, esta operación tendría la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rll}
130 & :7 & =18 \\
7\cdot\cdot & & \\
\hline
60 & & \\
56 & & \\
\hline
4 & &
\end{array}
$$

El dividendo, el divisor, e1 cociente y el residuo en ambos casos son, en esencia idénticos, aunque las cuentas intermedias sean diferentes.
Volver

3. ¿Par o impar?
No viendo el número, naturalmente resulta difícil saber si es par o impar. Pero desde luego, nos resulta fácil decirlo apenas percibido un número dado. Por ejemplo, ¿el número 16 es par o impar?
Si sabemos que está escrito en el sistema decimal, se está en lo justo al afirmar que dicho número es par. Pero cuando se escribe en cualquier otro sistema, ¿se puede estar seguro de que él representa, infaliblemente, un número par?

Evidentemente no. Si la base es, por ejemplo, siete, "16" denota 7 + 6 = 13, un número impar, Exactamente será, también, para toda base impar. (Porque todo numero impar + 6 es también un número impar).
De aquí la conclusión de que la divisibilidad entre dos (la última cifra par) conocida por nosotros, útil incondicionalmente sólo para el sistema de numeración decimal, para otros sistemas no lo es siempre. A saber, es justa solamente para sistemas de numeración con base par: de base seis, ocho, etc. ¿Cuál es la divisibilidad entre 2 para los sistemas de base impar? Es suficiente una corta reflexión para establecerla: la suma de las cifras deberá ser par. Par ejemplo, el número "136" es par en todo sistema de numeración, inclusive también con base impar; en efecto, en el último caso tenemos: un numero impar[9] + un numero impar + un par = número par,
Con la misma precaución es necesario referirse al problema: ¿Siempre es divisible el número 25 entre cinco? En el sistema de base siete u ocho, el número así representado no es divisible entre 5 (porque es igual a diecinueve o a veintiuno). En la misma forma, la bien conocida divisibilidad entre 9 (de acuerdo a la suma de las cifras) es justa, únicamente, para el sistema decimal. Por el contrario, en el sistema quinario se aplica la divisibilidad para el 4, y, por ejemplo, en el de base siete, para el 6. Así, el número "323" en el sistema quinario es divisible entre 4, porque 3 + 2 + 3 = 8, y el número "51" en el de base siete, es divisible entre 6 (es fácil convencerse de ello trasladando los números al sistema decimal): obtenemos respectivamente, 88 y 36). El lector mismo puede darse cuenta de por qué esto es así, si profundiza bien en la deducción de la divisibilidad entre 9 y aplica los mismos razonamientos, correspondientemente modificados, por ejemplo, al sistema de base siete para la deducción de la divisibilidad entre 6.
Es más arduo demostrar por un medio puramente aritmético, la legitimidad de las siguientes tesis:

$$121 : 11 = 11$$
$$144 : 12 = 12$$
$$21 \times 21 = 441$$

en todos los sistemas de numeración (en donde se tengan las cifras correspondientes).
Para los entendidos con los rudimentos del álgebra, es fácil hallar la base, que explique la propiedad de estas igualdades. Los restantes lectores las pueden experimentar para diversos sistemas de numeración.
Volver

4. Problemas instructivos.

1. ¿Cuándo 2 × 2 = 100?[10]
2. ¿Cuándo 2 × 2 = 11?[11]
3. ¿Cuándo 10 es número impar?[12]
4. ¿Cuándo 2 × 3 = 11?[13]
5. ¿Cuándo 3 × 3 = 14?[14]

---

[9] Un número impar multiplicado por sí mismo (es decir, por un impar), siempre da un número impar (por ejemplo, 7 × 7 = 49, 11 × 11 = 121, etc.)
[10] 2 × 2 = 100 cuando "100" está escrito en el sistema binario.
[11] 2 × 2 = 11 cuando "11" esta escrito en el sistema ternario.
[12] "10" es impar cuando está escrito en el sistema quinario, y también en los sistemas con base 3, 7 y 9.
[13] 2 × 3 = 11 cuando "11" está escrito en el sistema quinario.

Las respuestas a estas preguntas no deben dificultarse al lector que ha estado al corriente de este capítulo.
Volver

5. Fracciones sin denominador
Estamos habituados: al hecho de que, solamente las fracciones decimales se escriben sin denominador. Por tal razón, a simple vista, al parecer, no es posible escribir directamente sin denominador la fracción 2/7 ó 1/3. Sin embargo la cuestión se nos presenta en otra forma si pensamos en que son posibles las fracciones sin denominador en otros sistemas de numeración. ¿En el sistema quinario, qué denota, por ejemplo, la fracción "0.4"? Naturalmente, 4/5. En el sistema septenario la fracción "1.27" denota 1 2/7. ¿Y qué denota en el mismo sistema septenario la fracción 0.33"? Aquí el resultado más complicado: 3/7 + 49 = 24/49.
Consideremos aún, algunas fracciones no decimales sin denominador ¿A qué es igual

1. "2.121" en el sistema ternario?
2. "1.011" en el sistema binario?
3. "3.431" en el sistema quinario?
4. "2.(5)" en el sistema septenario?

Respuestas:

1. 2 + 1/3 + 2/9 + 1/27 = 2 16,27.
2. 1 + 1/4 + 1/8 = 1 3/8.
3. 3 + 4/5 + 3/25 + 1/125 = 3 116/125.
4. 2 + 5/7 + 5/49 + 5/343 + ... = 2 5/6.

El lector puede darse cuenta fácilmente de la justeza de la íntima igualdad si prueba aplicar al caso dado con la modificación correspondiente los razonamientos que se refieren a la transformación de fracciones decimales y periódicas a ordinarias.
Para concluir el capítulo, consideremos algunos problemas de índole especial (ver las respuestas al final del libro):

Problema 10. ¿En qué sistema de numeración está efectuada la siguiente adición?:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\,2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Problema 11. En qué sistema de numeración está efectuada la división:

[14] $3 \times 3 = 14$, cuando 14 está escrito en el sistema quinario.

$$\begin{array}{r l}
4415400 & :4532 = 543 \\
40344\cdots & \\
\hline
34100\cdots & \\
-31412\cdots & \\
\hline
22440\cdot\cdot & \\
-22440\cdot\cdot & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Problema 12. Escriba el número "ciento treinta" en todos los sistemas de numeración del binario a1 decimal, inclusive.

Problema 13. ¿A qué es igual el número "123" si se le considera escrito en todos los sistemas de numeración, hasta el nonario inclusive? ¿Es posible escribirlo en el sistema binario? ¿Y en el sistema ternario? Si está escrito en el sistema quinario, ¿se puede saber si es divisible exactamente entre dos, sin transcribirlo en el sistema decimal? Si está escrito en el sistema de base nueve, ¿es divisible exactamente entre cuatro?
Volver

6. Curiosidad Aritmética

$$2^5 \times 9^2 = 2592$$

Volver