[1]

Capítulo Quinto
Galería de Maravillas Numéricas

Contenido:

1. Museo De Curiosidades Aritméticas

En el mondo de los números, como también en el mundo de loa seres vivos, se encuentran maravillas auténticas, ejemplares únicos, que poseen propiedades singulares. A partir de tales números no ordinarios de dicha especie, pudo ser constituido un museo de rarezas numéricas: el presente "museo de curiosidades aritméticas". En sus vitrinas hallaremos el lugar, no solamente de los gigantes numéricos sobre los que charlaremos aún más en un capítulo especial, sino también de los números de dimensiones discretas que, en compensación, se distinguen de la serie de los otros por ciertas propiedades no habituales. Algunos de ellos atraen la atención ya, por 1a

[1] En el dibujo de esta página dice, de arriba a abajo, respectivamente: ¿10 ó 12?; pie = 12 pulgadas: metro = 10 decímetros.

apariencia; otros descubren sus particularidades singulares solamente con un conocimiento más profundo.
Las particularidades interesantes de ciertos números representados en nuestra "galería", no tienen nada en común con algunas singularidades imaginarias que, los aficionados a lo misterioso, perciben en otros números. Como ejemplo de semejantes supersticiones numéricas, puede servir la siguiente reflexión aritmética, expresada sin cautela por el conocido escritor francés Víctor Hugo:
"El tres es un número perfecto. La unidad es al número 3, lo mismo que el diámetro al círculo. El número 3 es el único que posee centro. Los demás números, son elipses que tienen dos focos. De aquí, se sigue una particularidad propia, exclusiva del número 3. Al sumar las cifras de cualquier número múltiplo de 3, la suma es divisible exactamente entre 3".
En esta vaga y aparentemente profunda revelación, todo es inexacto; lo que no es frase, carece de sentido o es un absurdo. Solamente es justa la observación sobre la propiedad de la suma de las cifras, pero dicha propiedad no surge de lo señalado, y por lo mismo no representa una particularidad exclusiva del número 3: por ella se distingue en el sistema decimal, también el número 9, y en otros sistemas, los números menores, en una unidad, que la base.
Las maravillas de nuestra "galería" son de otro tipo: en ellas no hay nada misterioso ni indescifrable.

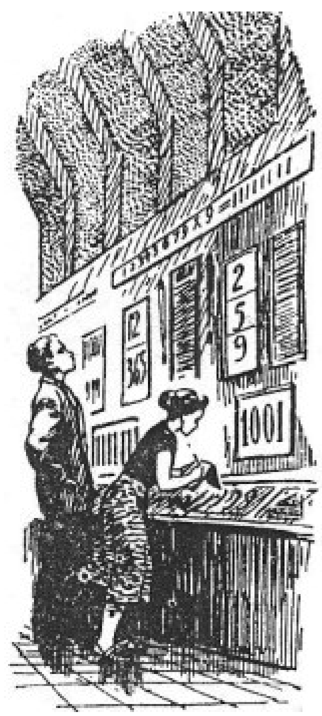

Figura 25. Vitrina de maravillas aritméticas

Invito al lector a realizar una excursión por la galería de tales maravillas numéricas y a entablar conocimiento con algunas de ellas.
Pasemos, sin detenernos, delante de las primeras vitrinas que encierran números cuyas propiedades son bien conocidas de nosotros. Sabemos ya por qué se hallaba el número 2 en la

galería de maravillas: no porque sea el primer número par[2] sino porque es la base de un interesante sistema de numeración.[3]
No será inesperado para nosotros encontrar aquí el número 9, también naturalmente, no como un "símbolo de constancia"[4] sino como el número que nos asegura la comprobación de todas las operaciones aritmética. Pero aquí está la vitrina; veamos a través de su cristal.
Volver

2. El Número 12
¿Qué tan admirable es?. Es el número de meses en el año y el número de unidades en la docena. Pero, en esencia, ¿qué hay de particular en la docena?. Por pocos es conocido que el 12 es el antiguo y derrotado rival del número 10 en la lucha por el puesto honorífico de base del sistema de numeración. Un pueblo de gran cultura del Antiguo Oriente, los babilonios, y sus predecesores sumerios, realizaban los cálculos en el sistema duodecimal de numeración. Hasta ahora, hemos pagado algo de tributo a este sistema, no obstante la victoria del decimal. Nuestra afición a las docenas y las gruesas[5], nuestra división del día en dos docenas de horas, la división de la hora en 5 docenas de minutos, la división del minuto en otros tantos segundos, la división del círculo en 30 docenas de grados, y finalmente, la división del pie en 12 pulgadas ¿no atestigua todo esto (y muchas otras cosas) sobre la gran influencia, en nuestros días, del antiguo sistema?
¿Es conveniente que en la lucha entre la docena y la decena halla triunfado esta última?. Naturalmente, por las intensas ligas de la decena con los diez dedos, nuestras propias manos han sido y continúan siendo máquinas calculadoras naturales. Pero si no fuera por esto, entonces convendría, incondicionalmente, dar la preferencia al 12 antes que al 10. Es mucho más conveniente realizar los cálculos en el sistema duodecimal que en el decimal. Esto se debe a que el número 10 es divisible entre 2 y 5, mientras que el 12 es divisible entre 2, 3, 4 y 6. En 10 hay, en total, dos divisores; en 12, cuatro. Las ventajas del sistema duodecimal se tornan claras si se considera que en este sistema un número que termina con cero, es múltiplo de 2, 3, 9 y 6: reflexiónese: ¡qué tan cómodo es dividir un número cuando precisamente 1/2, 1/3, 1/4 y 7/6 deben ser números enteros!
Si el número expresado en el sistema duodecimal termina con dos ceros, deberá ser divisible entre 144, y por consiguiente, también entre todos los multiplicadores de 144, es decir, entre la siguiente serie de números:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Catorce divisores, en lugar de los ocho que tienen los números escritos en el sistema decimal, si terminan con dos ceros (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100). En nuestro sistema solamente fracciones de la forma 1/2, 1/4, 1/5, 1/20 etc., se convierten en decimales finitos; en el sistema duodecimal se pueden escribir: sin denominador mucho más diversas fracciones y ante todo: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6,

[2] Como primer número par se puede, por otra parte, considerar, no al 2, sino al 0.
[3] Se refiere al sistema binario de numeración que se aplica para representación de los números y la realización de las operaciones en la generalidad de las máquinas computadoras aritméticas. La utilización de dicho sistema permite el empleo, en la construcción y análisis de esquemas funcionales de la lógica matemática y asegurar una simplificación substancial de la estructura de los dispositivos aritméticos y de memoria, en comparación con los casos en que se usan otros sistemas de numeración.
[4] Los antiguos (discípulos de Pitágoras) consideraban el 9 como un símbolo de constancia, "puesto que todos los números múltiples de 9, tienen como suma de las cifras, un múltiplo de 9".
[5] Una gruesa son 12 docenas. 144 objetos de un mismo genero constituyen una gruesa.

1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144, las que respectivamente se representan así:

0.6: 0.4; 0.3: 0.2; 0.16; 0.14: 0.1; 0.09; 0.08; 0.06; 0.04: 0.03: 0.02; 0.01.

Por otra parte, sería un gran error pensar que la divisibilidad de un número puede depender del sistema de numeración en que esté representado. Si unas nueces contenidas en un saco, pueden ser separadas en 5 montones idénticos, entonces esta propiedad de ellas, naturalmente, no se modifica a causa de que nuestro número de nueces esté expresado en uno u otro sistema de numeración o dispuesto en un ábaco, o escrito con letras, o representado por cualquier otro método. Si el número escrito en el sistema duodecimal es divisible entre 6 o entre 72, entonces, al ser expresado en otro sistema de numeración, por ejemplo en el decimal, deberá tener los mismos divisores. La diferencia consiste únicamente en que, en el sistema duodecimal la divisibilidad entre 6 o entre 72 es fácil de descubrir (el número termina en uno o en dos ceros).
Ante tales ventajas del sistema duodecimal, no es entraño que entre los matemáticos se corriera la voz en favor de un traslado total a este sistema. Sin embargo, estamos ya demasiado acostumbrados al sistema decimal como para resolverse por tal sistema.
El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión respecto a dicho problema: "La base de nuestro sistema de numeración no es divisible entre 3 ni entre 4, es decir, entre dos divisores muy empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (cifras) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal innovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dio origen a nuestra aritmética que es, la posibilidad de calcular con los dedos de las manos".
Por el contrario, procedía, por uniformidad, pasar también a los decimales en la medición de los arcos, de los minutos y de los grados.
Dicha reforma se intentó realizar en Francia, pero no llegó a implantarse. No había otro, aparte de Laplace que fuera un ardiente partidario de esta reforma. Su célebre libro "Exposición de un sistema del mundo" sucesivamente realiza la subdivisión decimal de los ángulos; llama grado, no a la noventava, sino a la centésima parte de un ángulo recto, minuto a la centésima parte de un grado, etc. Inclusive, Laplace emitió su opinión sobre la subdivisión decimal de las horas y de los minutos. "La uniformidad del sistema de medidas, requiere que el día esté dividido en 100 horas, la hora en 100 minutos, el minuto en 100 segundos" escribió el eminente geómetra francés.
Se ve, por consiguiente, que la docena tiene por sí misma, una larga historia, y que el número 12. no sin fundamento se encuentra en la galería de las maravillas numéricas. Por el contrario su contiguo, el número 13, figura aquí no porque sea notable, sino más bien por no serlo, aunque precisamente se emplea por una gloria sombría: ¿no es extraordinario que no habiendo nada que distinga al número, pudiera éste llegar a ser "peligrosa" pera las gentes supersticiosas?.
La forma en que fue propagada esta superstición (que se originó en la antigua Babilonia) es evidente por el hecho de que en la época del régimen zarista, en el dispositivo del tranvía eléctrico en Petersburgo no se decidieron a introducir la ruta número 13, omitiéndola y pasando a la número 14. Las autoridades pensaban que el público no querría viajar en vagones con tal "siniestro" número. Es curioso que en Petersburgo los alojamientos que atendían 13 cuartos, estuvieran solitarios... En los hoteles, generalmente no existía la habitación número 13. Para la lucha contra esta superstición numérica, sin fundamento, en algunas partes de Occidente (por ejemplo, en Inglaterra) se han constituido inclusive "Clubes del número 13" especiales.
En la siguiente vitrina del museo de maravillas aritméticas vemos ante nosotros al número 365.
Volver

3. Número 365

Es notable, ante todo, porque denomina el número de días en el año. Además, en la división entre 7 da, en el residuo, 1: por ser un residuo tan insignificante, esta propiedad del número 365 adquiere un gran significado para nuestro calendario de siete días.

Otra propiedad del número 365 no relacionada con el calendario, es

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

es decir, que el número 365 es igual a la suma de los cuadrados de tres números consecutivos, empezando por el 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

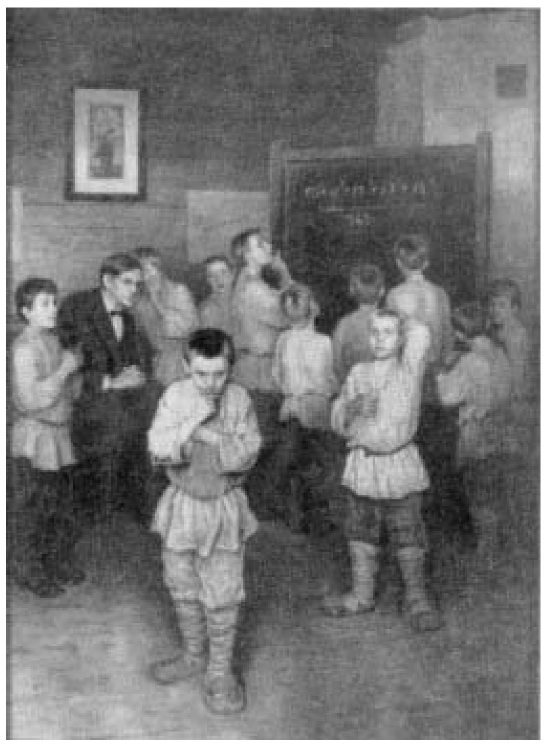

Figura 27. Viñeta del famoso cuadro del artista Bogdánov-Bielski, titulado "Un Problema Difícil"

Pero además, es igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes números, 13 y 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

En esta propiedad del número 365 se basa el conocido problema de S. A, Rachinsky que inspiró el famoso cuadro de Bogdánov-Bielsky. "problema difícil" (figura 27)

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$

Pocos números de esta índole reúnen en nuestra galería de maravillas aritméticas.
Volver

4. Tres Nueves
En la siguiente vitrina está, expuesto el mayor de todos los números de tres cifra: el 999. Dicho número, sin duda es mucha más extraordinario que su imagen volcada 666, el famoso "número bestial" del Apocalipsis que ha inspirado un temor absurdo entre algunas gentes supersticiosas que, conforme a las propiedades aritméticas nada hay que lo distinga de los demás números.

Figura 28. Un número por el cual es fácil multiplicar

Una propiedad interesante del número 999 se manifiesta en su multiplicación con cualquier otro número de tres cifras. Entonces se obtiene un producto de seis cifras: sus tres primeras cifras constituyen el número multiplicado, disminuido de una unidad, y las tres cifras restantes (inclusive la última) son el "complemento" al 9, de las primeras. Por ejemplo:

573:

$$573 \times 999 = 572\ 427$$

Basta, solamente, echar una ojeada al siguiente renglón, para entender el origen de esta particularidad:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000-1) = 573\ 000 - 573 = 572\ 427$$

Conociendo esta particularidad, podemos multiplicar "instantáneamente" cualquier número de tres cifras por 999:

$$917 \times 999 = 966\ 083,$$
$$509 \times 991 = 508\ 491,$$
$$981 \times 999 = 980\ 019$$

.

Y puesto que 999 = 9 x 111 = 3 x 3 x 3 x 37, se pueden, otra vez con la rapidez de un rayo, escribir colonias enteras de números de seis cifras, múltiplos de 37; no conocidas las propiedades del número 999, naturalmente no se está en situación de hacer esto. Hablando brevemente, se pueden organizar ante profanos, pequeñas funciones de "multiplicación y división instantáneas".
Volver

5. El Número de Scheherazada
El que sigue en turno es el número 1001, el célebre número de Scheherazada. Pocos sospechan, probablemente, que en la denominación misma de una colección de cuentos encantados árabes se

encienta una especie de maravilla, que podría exaltar la imaginación del sultán del cuento, no en menor grado que algunas otras maravillas de Oriente, si él hubiera sido capaz de interesarse por las maravillas aritméticas.

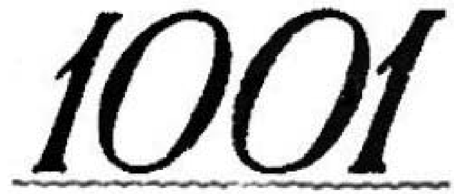

Figura 29. El número de Scheherazada

¿Qué tan notable es el número 1001? En aspecto, al parecer es muy ordinario. Inclusive, no pertenece al escogido orden de los llamados números "primos". Dicho número es divisible entre 7, 11 y 13, es decir, entre: tres números primos consecutivos, el producto de los cuales resulta ser el mencionado número. Pero la maravilla no consiste en que el número 1001 = 7 x 11 x 13, ya que aquí no hay nada de mágico. Lo mas notable es que al multiplicar un número de tres cifras por dicho número, se obtiene un resultado que consiste del mismo número multiplicado, sólo que escrito dos veces, por ejemplo:

$$873 \times 1001 = 873\ 873,$$
$$207 \times 1001 = 207\ 207,$$

Y aunque esto era de esperarse, puesto que

$$873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\ 000 + 873,$$

aprovechando la señalada propiedad "del número de Scheherazada" se pueden lograr resultados completamente inesperados, por lo menos para el hombre no preparado.
Ahora, aclaremos en que forma.
Se puede sorprender a un grupo de camaradas no iniciados en los misterios aritméticos, con el siguiente truco, Supóngase que alguno escribe en un pedazo de papel, en secreto, el número de tres cifras que desee, y que enseguida le agrega el mismo número.
Se obtiene un número de seis cifras que se compone de tres cifras repetidas. Se le propone al mismo camarada o a su vecino dividir este número, en secreto, entre 7; además, con anticipación se predice que en la división no se obtendrá residuo. El resultado se transmite al nuevo vecino, quien de acuerdo con la proposición, lo divide entre 11, y aunque no se conoce el dividendo, uno puede afirmar que también ese número se divide sin residuo. El resultado obtenido se proporciona al siguiente vecino, al cual se le solicita que divida este número entre 13, y conforme a lo predicho de antemano, la división no dará ningún residuo. El resultado de la tercera división. sin ver el número obtenido se traslada al primer camarada con las palabras:

- *¿Este es el número que Ud. Pensó?*
- *Así es, Ud. acertó, le contestarán sin duda alguna.*

¿Cuál es la clave del truco?

Este bonito truco aritmético, que produce en los no iniciados un efecto de magia, se explica en uno forma muy sencilla: recuérdese que el agregar a un número de tres cifras el propio número, significa multiplicarlo por 1001, es decir, por el producto 7 x 11 x 13. El número seis cifras que obtiene nuestro camarada después de agregar al número dado el propio número, deberá, por esta razón, dividirse exactamente entre 7, entre 11 y entre 13; y como consecuencia de la división, consecutivamente, entre estos tres números (es decir, entre su producto 1001) se deberá naturalmente, obtener otra vez el número pensado.

La realización del truco se puede variar conforme los deseos en tal forma, que se tenga la posibilidad de encontrar el número enigmático que se obtiene en el total de los cálculos. Es sabido que el número de seis cifras sobre el cual se comienzan a hacer los cálculos, es igual al producto

$$(\text{número pensado}) \times 7 \times 11 \times 13.$$

Por tal razón, si se pide dividir el número de seis cifras, primero entre siete, después entre 11, luego entre el número pensado entonces, con seguridad se puede encontrar como total final de todas las divisiones al 13.

Repitiendo el truco, se pide realizar las divisiones en otro orden: al principio entre 11, después entre el número pensado y entre 13. La última división deberá dar 7 como cociente. O al principio entre 13, después entre el número pensado, y luego entre 7; el total final es 11.

Volver

6. El Número 10101

Después de lo indicado sobre el número 1001, ya no será una sorpresa ver al número 10101 en las vitrinas de nuestra galería. Se adivina a qué propiedad, precisamente, está obligado este número por tal honor. El, como el número 1001, da un resultando sorprendente en la multiplicación, pero no de números de tres cifras, sino de dos cifras; todo número de dos cifras, multiplicado por 10 101, da como resultado el propio número, escrito tres veces.

Figura 30. Un número que se presta para trucos

Por ejemplo:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373$$
$$21 \times 10\,101 = 212\,121.$$

La causa se aclara por el siguiente renglón:

$$73 \times 10101 = 73\ (10000 + 100 + 1) = 730000 + 7300 + 73$$

¿ Con ayuda de este número se pueden hacer trucos de adivinación no habitual, como con el número 1001?

Sí se puede. Aquí es posible inclusive, disponer de un truco más variado, si se tiene en cuenta que 10101 es producto de cuatro números primos:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Proponiendo a un camarada pensar un número de dos cifras, a un segundo se le pide agregarle el propio número, a un tercero agregar el propio número una vez más. A un cuarto se le pide dividir el número de seis cifras obtenido, entre 7 por ejemplo; un quinto camarada deberá dividir el cociente obtenido entre 3; un sexto divide lo que se obtuvo entre 37 y, finalmente, un séptimo divide este resultado entre 13; las cuatro divisiones se realizan sin residuo. El resultado de la última división se transmite al primer camarada: éste es, precisamente, el número pensado por él.
En la repetición del truco se puede introducir cierta variedad, empleando cada vez nuevos divisores. A saber, en lugar de los cuatro multiplicadores 3 x 7 x l3 x 37, se pueden tomar loa siguientes grupos de tres multiplicadores:

$$21 \times 13 \times 37;$$
$$7 \times 39 \times 37$$
$$3 \times 91 \times 37$$
$$7 \times 13 \times 111.$$

Este truco es fácil de modificar en forma semejante a como fue explicado en el caso anterior (en el truco con el número 1001).
El número 101001 es, quizás aun más sorprendente que el número encantado de Scheherazada, aunque también sea menos conocido en cuanto a sus propiedades singulares. Sobre él se escribió además, ya doscientos años antes, en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo donde se proporcionan ejemplos de multiplicación, "con una cierta sorpresa". Dicho número, con mayor razón, debe incluirse en nuestra colección de maravillas aritmética.
Volver

7. El Número 10001
Con este número se pueden también hacer trucos a la manera de los anteriores, aunque quizás no tan variadas.

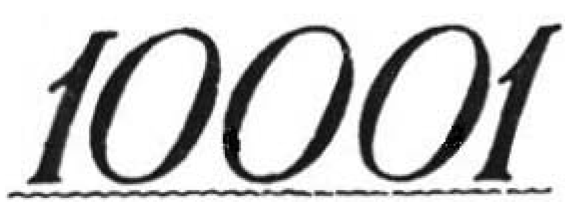

Figura 31. Otro número que se presta para trucos

Es que dicho número representa en sí, el producto de dos números primos solamente:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Tengo confianza en que el lector, después de todo lo indicado arriba, se dará cuenta de cómo se aprovecha eso para la realización de las operaciones aritméticas "con sorpresa".

Volver

8. Seis Unidades

En la siguiente vitrina vemos una nueva maravilla del museo de curiosidades aritméticas el número que consiste de seis unidades. En virtud del conocimiento de las propiedades mágicas del número 1001, simultáneamente nos damos cuenta de que

111111 = 111 x 1001.

Figura 32. Número útil para la adivinación

Pero 111 = 3 x 37, y 1001 = 7 x 11 x 13. De aquí se sigue que nuestro nuevo fenómeno numérico, que se compone solamente de unidades, representa en sí, el producto de cinco multiplicadores primos. Combinando estos cinco multiplicadores en todas las formas posibles, en dos grupos, obtenemos 15 pares de multiplicadores que dan como producto uno y el mismo número 111111:

3 x (7 x 11 x 13 x 37) = 3 x 37037 = 111111
7 x (3 x 11 x 13 x 37) = 7 x 15873 = 111111
11 x (3 x 7 x 13 x 37) = 11 x 10101 = 111111
13 x (3 x 7 x 11 x 37) = 13 x 8547 = 111111
37 x (3 x 7 x 11 x 13) = 37 x 3003 = 111111
(3 x 7) x (11 x 13 x 37) = 21 x 5291 = 111111
(3 x 11) x (7 x 13 x 37) = 33 x 3367 = 111111

Se puede, en ese caso, poner a un grupo de 15 camaradas el trabajo de multiplicación y, aunque cada uno multiplicara un distinto par de números, todos obtendrían uno y el mismo resultado original: 111111.

El mismo número 111111 es útil también, para la adivinación de números pensados, a semejanza de los medios; usados con los números 1001 y 10101. En el caso dado se propone pensar un número de una cifra, y repetirlo 6 veces. Como divisores pueden servir aquí, cinco números primos: 3, 7, 11, 13, 37 y las combinaciones obtenidas de ellos: 21, 33, 39, etc. Esto proporciona la posibilidad de variar en extremo la realización del truco.

Por ejemplo, del número 111111 el lector ve cómo se quede emplear, para los trucos aritméticos, un número que se componga de puras unidades, si se descompone en factores. Para fortuna de los aficionados a semejantes trucos, algunos números, de tal sistema, no son primos, sino compuestos.

De los primeros 17 números de esta especie solamente los dos menores, 1 y 11, son primos, los restantes son compuestos. He aquí cómo se descomponen en factores primos, los primeros diez de los números compuestos de este sistema.

111 = 3 x 37

1.111	=	11 x 101
11.111	=	41 x 271
111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 37
1.111.111	=	239 x 4649
11.111.111	=	11 x 73 x 101 x 137
111.111.111	=	9 x 37 x 333 667
1.111.111.111	=	11 x 4l x 271 x 9091
111.11.111.111	=	21649 x 513 239
111.111.111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 87 x 101 x 9901

No todos los números aquí dados son convenientes para la adivinación.
Pero números de 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 12 unidades son más o menos útiles para este objeto. Ejemplos de su uso para adivinación, se darán al final del siguiente capítulo.
Volver

9. Pirámides Numéricas
En las siguientes vitrinas de la galería admiramos notabilidades numéricas de una especie muy particular: con semejanza a pirámides compuestas de números. Consideremos más de cerca a la primera de ellas (fig. 33).

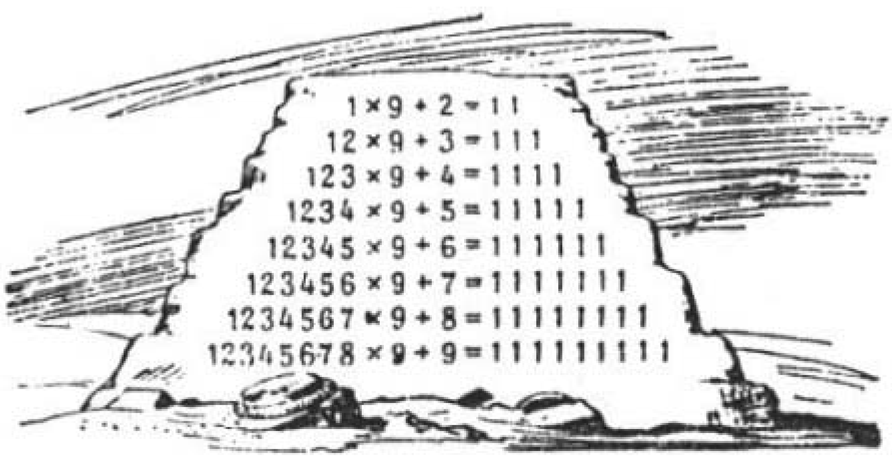

Figura 33. Primera pirámide numérica

¿Cómo explicar estos resultados singulares de la multiplicación?
Para comprender esta rara singularidad, tomemos como ejemplo cualquiera de las filas intermedias de nuestra pirámide numérica: 123456 x 9 + 7. En lugar de la multiplicación por 9, se puede multiplicar por (10-1), es decir, agregar el 0 a la derecha y restar el multiplicando:

$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = 1.111.111$$

Basta echar una ojeada sobre la última substracción para comprender por qué se obtiene un resultado que consiste solamente de unidades.
Podemos también explicar esto, partiendo de otros razonamientos. Para que un número de la forma 12345… se convierta en un número de la forma 11111…, es necesario restar 1 a la

segunda de sus cifras, 2 a la tercera. 3 a la cuarta, 4 a la quinta y así sucesivamente; en otras palabras, restar de él el mismo número de la forma 12345 … privado de su última cifra, es decir disminuido 10 veces y carente previamente de su última cifra.
Ahora, es comprensible que para la obtención del resultado buscado es necesario multiplicar por 10 nuestro número y agregarle la cifra que sigue, en calidad de última cifra, y restar al resultado el número original (y multiplicar por 10 y restar el multiplicando quiere decir, multiplicar por 9).
En forma análoga se explica la formación de la siguiente pirámide numérica (fig. 34), que se obtiene en la multiplicación de una determinada serie de cifras por 8 y la adición de cifras que consecutivamente aumentan.

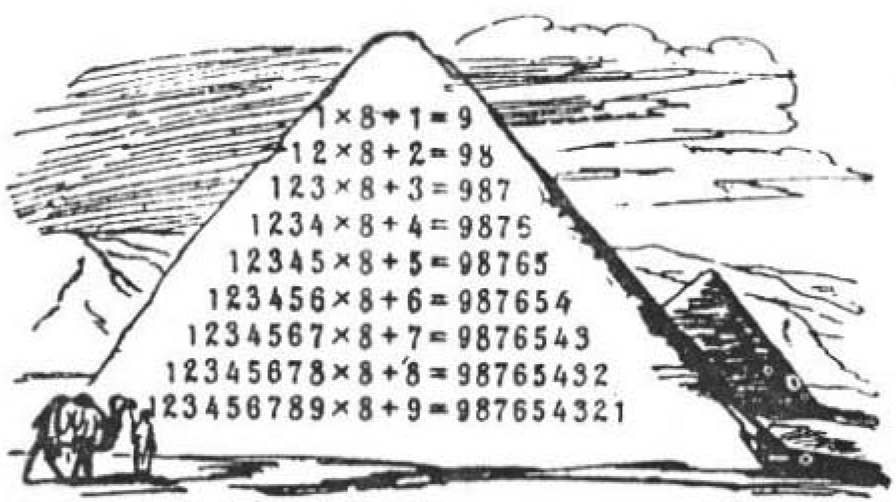

Figura 34. Segunda pirámide numérica

Particularmente interesante en la pirámide, es la última fila donde, como resultado de la multiplicación por 8 y la adición del 9, tiene lugar la transformación de la serie natural total de cifras, en dicha serie, pero con una disposición inversa.
Intentemos explicar esta particularidad.
La obtención de los extraños resultados se aclara por el siguiente renglón:

12345 x 9 + 6 = 111111[6]

12 345 x 8 + 5 = 98765

es decir

12345 x (9 -1) x 8 + 5 + 1 – 1 = 12345 x 9 – 12345 - 1 = 111111 - 12 316.

Pero restando del número 111111 el número 12346 compuesto de una serie de cifras crecientes, obtendremos, como es fácil de comprender, una serie de cifras decrecientes: 98765.
He aquí, finalmente, la tercera pirámide numérica, que también requiere explicación (fig. 35).

[6] Por qué 12345 x 9 + 6 da precisamente 111111, fue mostrado en la consideración de la pirámide anterior.

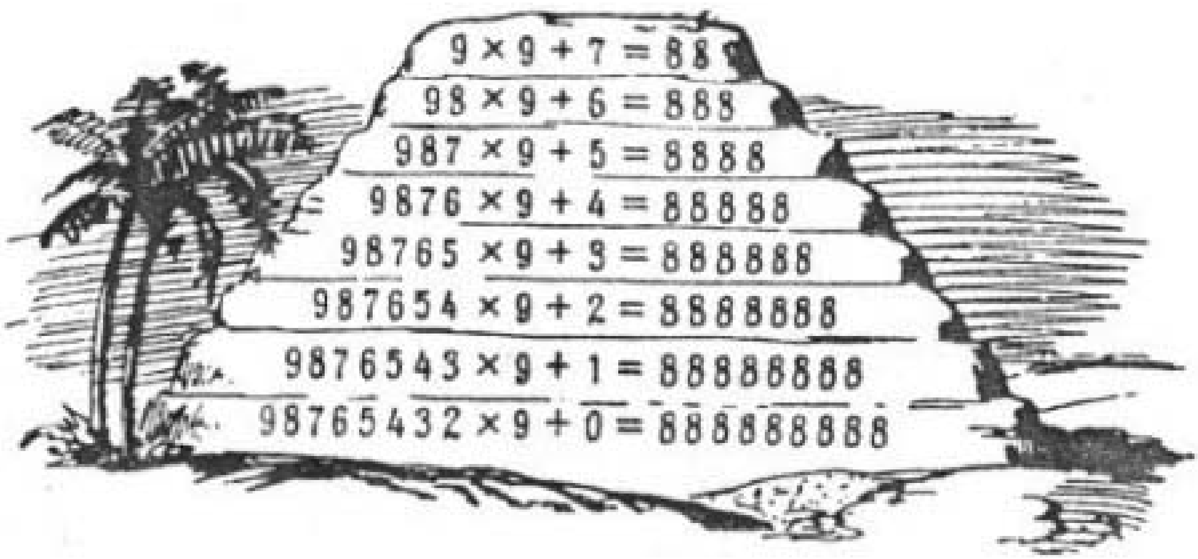

Figura 35. Tercera pirámide numérica

Esta pirámide es una consecuencia directa de las dos primeras. La relación se establece muy fácilmente. De la primera pirámide sabemos ya que, por ejemplo:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Multiplicando ambos miembros por 8, tenemos:

$$(12\ 345 \times 8 \times 9) \times (6 \times 8) = 888888.$$

Pero de la segunda pirámide se sabe que

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

ó

$$12345 \times 8 = 98760.$$

Vale decir,

$$888888 = (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8)$$
$$888888 = (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3$$
$$888888 = (98\ 760 + 5) \times 9 + 3$$
$$888888 = 98\ 765 \times 9 + 3.$$

Se convence uno de que todas estas pirámides numéricas no son tan misteriosas como parece a primera vista. Pero algunos las consideran, sin embargo, no descifradas. Me tocó una vez, verlas impresas en un periódico alemán con una nota: "La causa de tan sorprendente singularidad, hasta el presente todavía nadie se la ha explicado. ..."
Volver

10. Nueve Cifras Iguales
El último renglón de la primera "pirámide" (fig. 33)

12 345 678 x 9 + 9 = 111.111.111

representa un ejemplo de un grupo completo de interesantes curiosidades aritmética en nuestro museo, reunidas en una tabla (ver fig. 36).

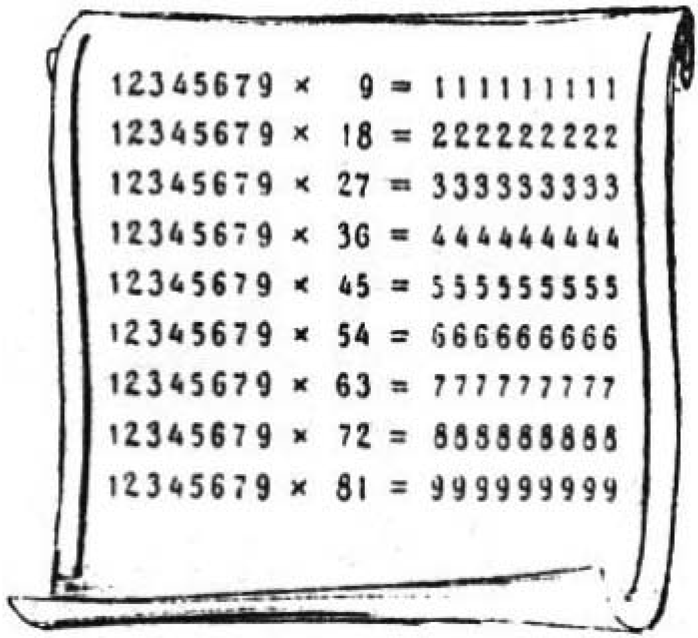

Figura 36.

¿Dónde está la tal singularidad en los resultados? Tomemos en cuenta que

12345 678 x 9 + 9 = (12345 678 + 1) x 9 = 12 345 679 x 9.

Por esta razón

12 345 679 x 9 = 111111111.

Y de aquí se sigue directamente que

12345 679 x 9 x 2 = 222222222
12345 679 x 9 x 3 = 333333333
12345 679 x 9 x 4 = 444444444

Volver

11. Escala Numérica

Es interesante determinar qué se obtiene si el número 111111111, con el cual ahora tenemos que ver, se multiplica por sí mismo. De antemano se puede sospechar que el resultado deberá ser singular, pero ¿cuál es precisamente?

Si se pasee capacidad para dibujar con claridad en la imaginación una serie de cifras, se llegará a encontrar el resultado que nos interesa, aun sin recurrir a los cálculos sobe el papel. En esencia, aquí la cuestión conduce solamente a una disposición adecuada de los productos parciales, porque al multiplicar se hace solamente de unidad por unidad. La adición de los productos parciales lleva a un sencillo cálculo de unidades[7]. He aquí el resultado de esta multiplicación, singular en su especie (en la realización de la cual no se llega a recurrir a la operación de multiplicación):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
&&&&&&&\times&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\hline
&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\\
&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&\\
&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&\\
&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&\\
&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&\\
\hline
1&2&3&4&5&6&7&8&9&8&7&6&5&4&3&2&1
\end{array}
$$

Las cifras de este resultado disminuyen simétricamente, a partir del centro, en ambas direcciones.
Aquellos lectores que se hayan cansado de la revista de las maravillas numéricas, pueden abandonar aquí la "galería" y pasar a las siguientes secciones en donde se muestran trucos y están presentados los gigantes y enanos numéricos: deseo señalar que ellos pueden suspender la lectura de este capítulo y pasar al siguiente. Pero quien todavía desee ponerse al corriente de algunas notabilidades del mundo de los números, lo invito a visitar conmigo una pequeña serie de vitrinas cercanas.
Las maravillas numéricas sobre las cuales se hablará ahora reclaman del lector, el conocimiento de las llamadas fracciones periódicas infinitas. Aquellos lectores que no estén al corriente de ellas, les propongo transformar las siguientes fracciones ordinarias; en decimales, conforme al método bien conocido:

¼, 1/8, 1/3, 1/11

Es fácil persuadirse de que las dos primeras fracciones, al convertirse en decimales, dan un número finito de dos y tres cifras respectivamente.
Al convertir en decimales las fracciones restantes, se obtienen series infinitas de cifras que se repiten en un orden determinado:

1/3 = 0.3333333….
1/11 = 0.09090909090909…

[7] En el sistema binario de numeración, como ya fue explicado (ver Cap IV) todas las multiplicaciones son, precisamente de tal especie.

Tales fracciones se denominan periódicas, y el grupo de cifras que se repite en ellas se llama periodo.
Volver

12. Anillos Mágicos

¡Qué extraños anillos están expuestos en la siguiente vitrina de nuestra galería! Ante nosotros (fig. 37) hay tres anillos planos que giran uno con el otro.

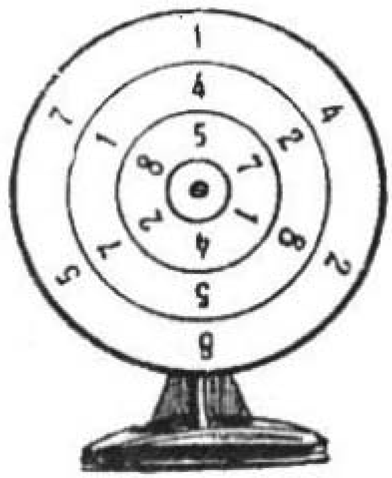

Figura 37. Anillos numéricos giratorios

En cada anillo están escritas seis cifras, en uno y el mismo orden, que forman el número: 142857. Los anillos poseen la propiedad admirable siguiente: en cualquier forma en que sean girados, en la adición de dos números escritos sobre ellos (contando a partir de cualquier cifra en la dirección de giro de las manecillas del reloj), obtenemos en todos los casos el mismo número de seis cifras (en general el resultado será de seis cifras) ¡solamente que algo adelantado! (ver fig. 37). En la posición que se representa en la fig. 37, obtenemos en la adición de los dos anillos exteriores.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \underline{-428571} \\ 571428 \end{array}$$

es decir, otra vez la misma serie de cifras: 142857 solamente las cifras 5 y 7 se han transferido del final al principio.
En otras disposiciones de los anillos, relativas de uno con respecto a otro, tenemos los casos:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \underline{-571428} \\ 857142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-142857} \\ 857142 \end{array}$$

Y así sucesivamente.
La excepción lo constituye el caso en que en el resultado se obtiene 999999:

$$\begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-285714} \\ 999999 \end{array}$$

(La causa de otras desviaciones respecto de la regla indicada, el lector la podrá captar cuando termine de leer este apartado).
Además, esa misma serie de cifra, en idéntica secuencia la obtenemos también en la substracción de los números escritos en los anillos.
Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ \underline{-142857} \\ 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\ 128 \\ \underline{-285\ 714} \\ 285\ 714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-142857} \\ 571428 \end{array}$$

La excepción la constituye el caso en que son puestas en coincidencia cifras idénticas; por supuesto, la diferencia es igual a cero.
Pero esto no es todo. Al multiplicar el número 142857 por 857 por 2, 3, 4, 5 ó por 6, se obtiene otra vez la misma serie de cifras, pero desplazada en una disposición circular, en una o en varias cifras:

142 857 x 2 = 285 714
142 857 x 3 = 428 571
142 857 x 4 = 571 428
142 857 x 5 = 714 285
142 857 x 6 = 857 142

¿Qué tanto están condicionadas estas enigmáticas particularidades de nuestro número?
Damos con el camino de la clave, si prolongamos un poco la última tabla y probamos multiplicar nuestro número por 7: como resultado se obtiene 999999. Vale decir, el número 142 857 no es otra cosa que la séptima parte de 999999 y, por consiguiente, la fracción 142857/999999 = 1/7
En efecto, si se transforma 1/7 en fracción decimal se obtiene:

1/7 = 0.142 857...

es decir

1/7 = 0.(142 857)

Nuestro enigmático número es el periodo de una fracción periódica infinita que se obtiene en la transformación de 1/7 en decimal. Es comprensible ahora, por qué en la duplicación, triplicación,

etc. de este número se produce solamente una nueva colocación de un grupo de cifras en otro lugar. En efecto, la multiplicación de este número por 2 lo hace igual a 2/7 y por lo tanto, equivalente a la transformación en fracción decimal, ya no de 1/7, sino de 2/7. Empezando a transformar la fracción 2/7 a decimal, se observa que la cifra 2 es uno de aquellos restos que ya obtuvimos en la transformación de 1/7: es evidente que deberá repetirse la precedente serie de cifras del cociente, pero empezando éste con otra cifra; en otras palabras, deberá obtenerse el mismo periodo, pero sólo que algunas de sus cifras iniciales se encuentran al final. Lo mismo se produce, también en la multiplicación por 3, por 4, 5, y 6, es decir. por todos los números que se obtienen en los restos. En la multiplicación por 7 deberemos obtener la unidad, o lo que es lo mismo 0.9999...
Los interesantes resultados de la adición y la substracción de los números, en los anillos hallan explicación en el hecho de que 142857 es el período de la fracción igual 1/7. En efecto, ¿qué hacemos, propiamente, girando el anillo en unas cuantas cifras?. Pasemos el grupo de cifras del principio al final, es decir, de conformidad con lo indicado, multipliquemos el número 142857 por 2, 3, 4, etc. Por lo tanto, todas las operaciones de adición y substracción de los números escritos en los anillos, llevan a la adición y substracción de las fracciones las 1/7, 2/7, 3/7 y así sucesivamente. Como, resultado debemos obtener, naturalmente fracciones de un séptimo, es decir, de nuevo nuestra serie de cifras 142857 en una u otra disposición circular. De aquí es necesario excluir solamente el caso en que se sumen, tales números de las fracciones de un séptimo, que en total den la unidad o más que 1.
Pero precisamente los últimos casos no se excluyen totalmente: ellos dan un resultado en verdad, no idéntico a los considerados pero fundamentalmente de acuerdo con ellos. Consideremos atentamente qué deberá obtenerse de la multiplicación de nuestro enigmático número con multiplicaciones mayores que 7, es decir por 8, 9, etc.
El multiplicar 142857 por 8, por ejemplo, lo podemos hacer así: multiplicar inicialmente por 7, y el producto (es decir, a 999999) agregar nuestro número:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999999 + 142\,857 =$$

$$1000\,000 - 1 - 142\,857 = 1000\,000 + (142\,857 - 1).$$

El resultado final 1.142.856 se distingue del multiplicando 142857 únicamente en que hay antepuesta una unidad, y la última cifra está disminuida por una unidad. De acuerdo a una regla similar se compone el producto de 142857 por todo número mayor que 7, como es fácil ver en los siguientes renglones:

142 857 x 8	= (142 857 x 7) + 142 857	= 1 142 856
142 857 x 9	= (142 857 x 7) + (142 857 x 2)	= 1 285 713
142 857 x 10	= (142 857 x 7) + (142 857 x 3)	= 1 428 570
142 857 x 16	= (142 857 x 7 x 2) + (142 857 x 2)	= 2 285 712
142 857 x 39	= (142 857 x 7 x 5) + (142 857 x 4)	= 5 571 423

La regla más general es la siguiente: en la multiplicación de 142857 por cualquier multiplicador, es necesario multiplicar solamente por el residuo de la división del multiplicador entre 7; se antepone a este producto el número que indica la cantidad de sietes que existen en el multiplicador ese mismo número se substrae al resultado[8]. Supóngase que deseamos multiplicar 142857 por 88. El multiplicador 88 en la división entre 7 da 12 en el cuociente, el resultado de las operaciones indicadas es:

$$12571428 - 12 = 12571416$$

De la multiplicación 142857 x 365 obtenemos (puesto que 365 en la división entre 7 da en el cuociente 52 y como resto 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805$$

Aprendiendo esta sencilla regla y recordando los resultados de la multiplicación de nuestro singular número por los multiplicadores del 2 al 6 (que es muy difícil, siendo necesario tan sólo, recordar con qué cifras comienzan), se puede sorprender a los no iniciados con la rapidez de la multiplicación de un número de seis cifras; y para no olvidar este número sorprendente, observemos que él procede de 1/7, o lo que es lo mismo de 2/14: tenemos las tres primeras cifras, de nuestro número: 142. Las tres restantes se obtienen por substracción de las tres primeras de 1999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ \underline{-142} \\ 857 \end{array}$$

Ya hemos tenido que ver con tales números precisamente cuando nos pusimos al corriente de las propiedades del número 999. Recordando lo indicado allí, nos, damos cuenta de que el número 142857 es, evidentemente, el resultado de la multiplicación de 143 por 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Pero 143 = 13 x 11. Recordando lo observado anteriormente sobre el número 1001, igual a 7 x 11 x 13, estamos en condiciones, sin efectuar operaciones, de predecir qué deberá obtenerse de la multiplicación 142857 x 7:

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = 999 \times 1001 = 999999$$

(todas estas transformaciones, claro está, se pueden efectuar mentalmente).
Volver

13. Una Familia Fenomenal

El número 142857 que acabamos de tratar es uno de los miembros de una familia completa de números que poseen las mismas propiedades. He aquí uno de tales números: 0 588 235 294 117 647 (el 0 antepuesto es necesario). Si se multiplica este número por 4, por ejemplo, obtenemos aquella misma serie de cifras, sólo que las cuatro primera cifran estarán colocados al final:

[8] Si el multiplicador es múltiplo de siete, el resultado es igual al número 999999, multiplicado por la cantidad de sietes en el multiplicador; tal multiplicación se efectúa mentalmente en forma sencilla. Por ejemplo, 142857 x 28 = 999999 x 4 = 4000000 - 4 = 3999996

0 588 235 294 117 647 x 4 = 2 352 941 176 470 588.

Disponiendo las cifras de este número sobre varios anillos móviles (fig. 38) como en el caso anterior, en la adición de los números de dos anillos obtendremos el mismo número, sólo que desplazado en el orden circular:

```
  0 588 235 294 117 647
+ 2 352 941 176 470 588
  2 941 176 470 588 235
```

Naturalmente, las tres series que se disponen en los anillos, son idénticas:

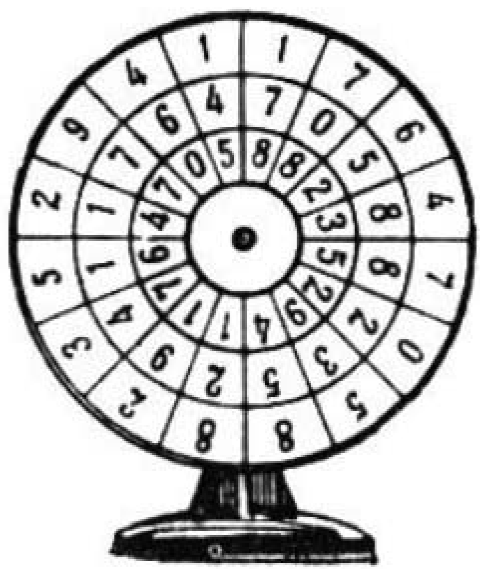

Figura 38.

De la substracción de los números de dos anillos, se obtiene otra vez el mismo círculo de cifras:

```
  2 352 941 176 470 588
- 0 588 235 294 117 647
  1 764 705 882 352 941
```

Finalmente, este número, como también el considerado antes, consiste de dos mitades: las cifras de la segunda mitad son el complemento a 9 de las cifras de la primera mitad.
Tratemos de encontrar la clave de todas estas particularidades.
No es difícil darse cuenta en qué forma la serie numérica dada ha resultado ser un pariente cercano del número 142 857; el número del anillo anterior representa en sí, el período de una fracción infinita igual a 1/7; el nuevo número es, probablemente, el período de cualquier otra fracción: y en efecto, nuestra larga serie de cifras no es otra cosa, que el período de la fracción infinita que se obtiene de la transformación de la fracción simple 1/17 a fracción decimal:

1/17 = 0 (0 588 235 294 117 647).

He aquí por qué, en la multiplicación de este número por tus multiplicadores del 1 al 16, se obtiene aquella misma serie de cifras en la cual, solamente una o varias cifras iniciales están transferidas al final del número. Y por el contrario, al transferir una o varias cifras de la serie, del comienzo al final, aumentamos el número en varias veces (del 1 al 16 inclusive). Sumando dos anillos girados, uno con relación al otro, producimos la adición de dos números multiplicados, por ejemplo, por tres y por diez, y naturalmente, se obtiene el mismo anillo de cifras, debido a que la multiplicación por 3 + 10, es decir, por 13, motiva solamente una transferencia insignificante del grupo de cifras en la disposición circular.

Con una cierta posición de los anillos se obtienen, sin embargo, sumas que difieren un poco de la serie inicial. Si, por ejemplo, giramos un anillo en tal forma que se sume un número multiplicado por seis con uno multiplicado por 15, en la suma se deberá obtener un número multiplicador por 6 + 15 = 21. Y tal producto, como es fácil darse cuenta, es algo distinto del producto por un multiplicador menor que 17. En efecto, nuestro número, período de una fracción igual a 1/17, al multiplicarse por 17 deberá dar 16 veces (es decir, tantos como cifras existan en el período de nuestra fracción periódica), o el 1 con 17 ceros menos 1. Por esta razón, en la multiplicación por 21, es decir por 4 + 17, deberemos obtener nuestro número cuadruplicado antepuesto al cual se halla el 1, y del orden de las unidades se resta 1. El número cuadruplicado empieza con las cifras que se obtienen en la transformación de la fracción siempre 4/17 en fracción decimal:

$$4 : 17 = 0.23\ldots$$

El orden de las cifras restantes es conocido: 5291... Vale decir, nuestro número, multiplicado por 21 será:

$$2\,352\,941\,176\,470\,587.$$

Lo mismo se obtiene de la adición de los círculos de cifras con una disposición correspondiente. En la substracción de los anillos numéricos de tal caso, no se puede.

De números semejantes a los dos con que hemos entablado conocimiento, existe una infinidad. Ellos constituyen una familia completa, puesto que están ligados por un origen común: a partir de la transformación de las fracciones simples en fracciones decimales infinitas. Pero no todo período de una fracción decimal tiene la interesante propiedad, anteriormente considerada, de dar en la multiplicación una transferencia circular de cifras. Sin entrar en sutilezas de la teoría, observamos que esto tiene lugar, solamente para aquellas fracciones en que el número de cifras de su periodo es menor en una unidad, al denominador de la fracción simple correspondiente. Así, por ejemplo

1/7 da en el período 6 cifras
1/17 da en el período 16 cifras
1/19 da en el período 13 cifras
1/23 da en el período 22 cifras
1/29 da en el período 28 cifras

Si la condición indicada ahora (relativa al número de cifras del periodo) no se satisface, entonces el correspondiente período da un número que no pertenece a la interesante familia numérica que nos ocupa. Por ejemplo, 1/13 da una fracción decimal con seis (y no con 12) cifras en el período:

$$1 / 13 = 0.076923$$

Multiplicando por 2, obtenemos un número completamente distinto.

$$2 / 13 = 0.153846$$

¿Por qué? Porque entre los restos de la división 1 / 13 no estaba el número 2. De los diferentes restos existen tantos, como cifras hay en el periodo, es decir, 6; de los diversos multiplicadores para la fracción 1 / 13 tenemos 12, por consiguiente, no todos los multiplicadores estarán entre los restos, sino únicamente 6. Es fácil darse cuenta de que estos multiplicadores son los siguientes: 1, 3, 4, 9, 10, 12. La multiplicación por estos 6 números da una nueva colocación circular (076 923 x 3 = 230 769), no siendo así en la multiplicación por los números restantes. Esta es la razón por la cual de 1/13 se obtiene un número útil sólo en parte para el "anillo mágico".
Volver

14. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 91 + \dfrac{5823}{647} \\ 94 + \dfrac{1578}{263} \\ 96 + \dfrac{1428}{357} \end{cases}$$