

## Capítulo Segundo

### El Abaco Antiguo y sus Descendientes.

#### Contenido:

1. El Rompecabezas de Chéjov
2. Cómo Calculaban en la Remota Antigüedad
3. Ecos de la Antigüedad
4. Curiosidades Aritméticas

#### 1. El Rompecabezas de Chéjov

Ahora veremos un ameno problema aritmético, tal y como lo planteó el estudiante de séptimo año, Ziberov, del cuento de Chéjov "el Repetidor".

"Un comerciante compró 138 arshins (1 arshin = 80 cm) de tela negra y azul por 540 rublos. Me pregunto, ¿cuántos arshin compró de cada una, si la tela azul costaba 5 rublos por arshin, y la negra, 3 rublos?"

Con gran humor, Chéjov relata cómo trabajaron sobre este problema tanto el repetidor de 7º año como su alumno Pedrito, de 12 años, mientras éste no fue rescatado por su padre:

"Pedrito observó el problema y, sin decir una palabra, empezó a dividir 540 entre 138.

- ¿Para qué divide Ud.? ¡Deténgase! O... continúe... ¿Aparece un residuo? Aquí no puede haber residuo. ¡Permítame!

- Probablemente no se trate de un problema aritmético, pensó, y vio la respuesta: 75 y 63-.

Hmm!, dividir 540 entre 5 + 3? no, no.

- Bien, ¡resuélvalo ya! - concluyó, ordenando a Pedrito.

- ¿Qué tanto piensas? Ese problema te quitará todo el tiempo - dijo a Pedrito su padre, Udodov. Se necesita ser tonto. Resuélvalo Ud. por esta vez, Egor Aliékseich.

Egor Aliékseich, coge el pizarrín y se dispone a resolverlo; tartamudea, enrojece. Palidece.

- Este problema debe ser algebraico – dijo -. Se puede resolver con ayuda de la  $x$  y de la  $y$ , Por otra parte, también así se puede resolver: Yo aquí he dividido...¿Comprende? Ahora es necesario restar. ¿Entiende?...o si no. . . Lo mejor será que me lo traiga resuelto mañana... Piénselo !

Pedrito sonrió. Udodov también sonrió. Ambos comprendían la confusión del maestro. El estudiante de VII grado se confundió aún más, y empezó a pasear de extremo a extremo de la habitación.

Al fin, Udodov dijo:

- Sin álgebra también se puede resolver - y agregó dirigiéndose hacia un ábaco- helo aquí, mire... Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser.

- Esto está hecho a nuestra manera... no científica".

Esta historia con el problema que había sembrado la confusión en el repetidor, plantea por sí misma tres nuevos problemas, a saber:

1. ¿Cómo hubiera el repetidor resuelto el problema algebraicamente?
2. ¿Cómo debió haber resuelto el problema Pedrito ?
3. ¿Cómo se lo resolvió su padre a Pedrito con el ábaco, en forma "no científica"?

A las primeras dos cuestiones, podemos responder probablemente sin trabajo alguno. La tercera no es tan simple. Pero vayamos en orden.

1. El repetidor de séptimo año hablaba de resolver el problema "con la ayuda de la  $x$  y de la  $y$ ", y decía que el problema debía ser "algebraico". Formar dos ecuaciones con dos incógnitas para el problema dado no es difícil; hela aquí:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 138 \\ 5x + 3y = 540 \end{array} \right\}$$

donde  $x$  es el número de arshins de tela azul, e  $y$ , el de tela negra.

2. Sin embargo se resuelve fácilmente, también, en forma aritmética. Suponiendo que toda la tela hubiera sido azul, los 138 arshins de tela azul hubieran costado  $5 * 138 = 690$  rublos; esto es,  $690 - 590 = 150$  rublos más del costo en la realidad. Para que el precio sea 150 rublos menor, basta considerar que la diferencia de precios entre un arshin de tela azul y uno de tela negra es de  $5 - 3 = 2$  rublos: dividiendo 150 entre 2, obtenemos 75 arshins de tela negra; restándolos de los 138 originales, obtenemos  $138 - 75 = 63$  arshins de tela azul. Así debió haber resuelto el problema Pedrito.

3. Queda aún la tercera pregunta: ¿Cómo resolvió el problema Udodov?

En el relato, se dice bien poco: "Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser".

¿Cuáles son los métodos de resolución de un problema con la ayuda del ábaco?

El ábaco sirve para efectuar operaciones aritméticas tal y como se hace en el papel (fig. 13).

Udodov conocía muy bien el ábaco y pudo hacer las operaciones muy rápido, sin la ayuda del álgebra como quería el repetidor, ni "de la  $x$  y de la  $y$ ". Veamos ahora las operaciones que el padre de Pedrito debió hacer en el ábaco.

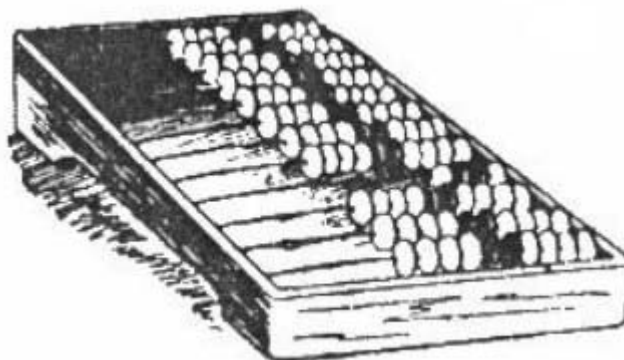


Figura 13. Abaco al estilo ruso.

La primera operación debió haber sido, como sabemos, multiplicar 138 por 5. Para eso, conforme a las reglas de las operaciones en el ábaco, primeramente multiplicó 138 por 5, es decir, simplemente movió el número 138 una hilera hacia arriba (ver la figura 14, a, b) y luego dividió este número entre dos, sobre el mismo ábaco. La división se empieza por abajo: se separan la mitad de bolitas colocadas en cada alambre; si el número de bolitas es impar en un alambre dado, se elimina la dificultad, "partiendo" una bolita de este alambre en 10 inferiores.

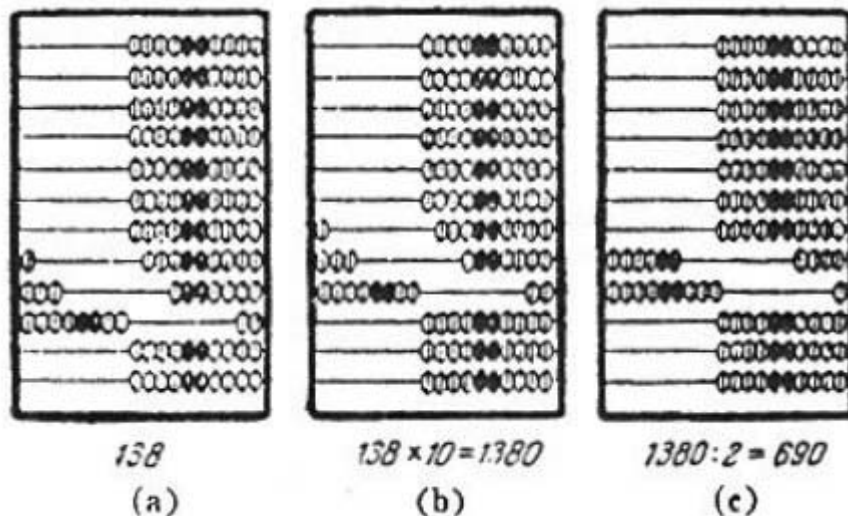


Figura 14. Primero se muestra, en el ábaco,  $138 \times 10$ , es decir el número 138 (a), sometido a la operación (b), y luego se muestra el resultado anterior dividido entre dos (c)

En nuestro caso, por ejemplo, 1380 se divide por la mitad en la forma siguiente: en el alambre inferior, donde existen 8 bolitas, se separan 4 bolitas (4 decenas), en el alambre intermedio de las 3 bolitas se separa 1, pero se conserva una, y la otra se substituye mentalmente por 10 inferiores y se dividen a la mitad, añadiendo o decenas a las bolitas inferiores; en el alambre superior se "parte" una bolita agregando 5 centenas a las bolitas del alambre intermedio. En consecuencia, en el alambre superior no hay bolitas, en el intermedio  $1 + 5 = 6$  centenas y en el inferior  $4 + 5 = 9$  (Fig. 14, c). En total 690 unidades. Todo esto se efectúa rápida y automáticamente.

Después, Udodov debió restar 540 de los 690. Sabemos cómo se hace en el ábaco.

Finalmente quedaba tan sólo dividir por la mitad la diferencia obtenían: 150; Udodov apartó 2 de las 5 bolitas (decenas), entregando 5 unidades a la fila inferior de bolitas; después de 1 bolita en el alambre de las centenas, entregó 5 decenas a la fila inferior: obtuvo 7 decenas y 5 unidades, es decir, 75.

Naturalmente, estas sencillas operaciones se efectúan más velozmente en el ábaco, que como aquí son descritas.

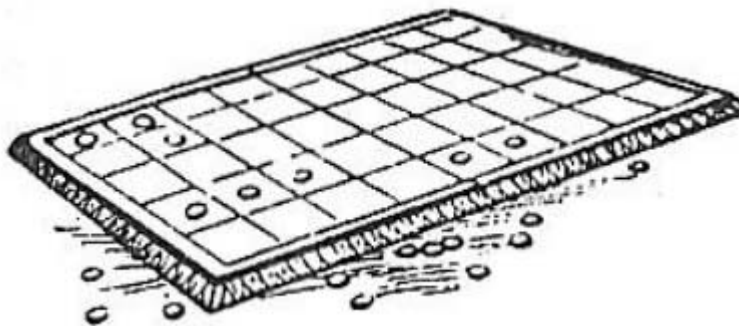
Volver

## 2. Cómo Calculaban en la Remota Antigüedad

Desde hace mucho tiempo, la gente ya sabía contar. Los dedos de las manos constituyeron el primer instrumento natural para contar. De ahí vino la idea de un sistema decimal de numeración en muchos pueblos antiguos. Debemos decir que las operaciones aritméticas con los dedos

sirvieron mucho tiempo como medio práctico para algunos pueblos, inclusive para los antiguos griegos. No debemos creer que con los dedos sólo se puede contar hasta diez. Por documentos de la literatura griega antigua que han llegado hasta nosotros, sabemos que ya en los siglos V y IV antes de nuestra era se habían desarrollado considerablemente las operaciones con los dedos cuyos resultados llegaban a miles.

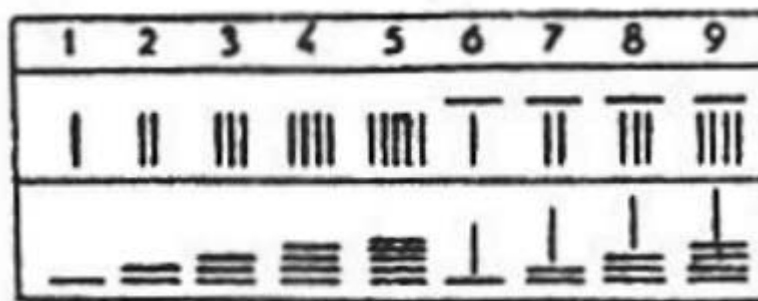
Posteriormente, entre los egipcios, griegos, romanos y chinos, y en otros pueblos antiguos, aparece un aparato para calcular que, de acuerdo a su idea, recuerda nuestro ábaco. Su forma en distintos pueblos era diferente. Así, el ábaco griego era en sí, un tablero (mesa) con cuadro, dibujados (fig.15), en el cual se desplazaban fichas especiales que hacían el papel de las bolitas de los ábacos de nuestro tiempo. El ábaco romano tenía la forma de un tablero de cobre con canales (con cortes), en los que se desplazaban botones.



*Figura 15. Tablero y fichas utilizadas para efectuar operaciones aritméticas, antes del aparato ábaco*

En la antigua China, para la representación de los números en el tablero de cálculo, se empleaban palitos con una longitud de 10 cm. y un espesor de 1 cm. Ya cerca del año 150 de nuestra era, eran ampliamente conocidos en China los métodos para efectuar, en el tablero de calcular, las cuatro operaciones aritméticas.

Había dos maneras de representar las cifras en el tablero de operaciones chino. Ambas están reproducidas en la fig. 16.



*Figura 16. Dos métodos de formación de cifras, en la tabla de operaciones china*

En la escritura de los números en el tablero, se seguía el siguiente proceso: la primera cifra (leyendo de derecha a izquierda) se representaba por el primer método; la siguiente, por el segundo; la tercera cifra de nuevo se representaba por el primer método, y la cuarta por el segundo método, y así sucesivamente. En otras palabras, todas las cifras de un número, que

ocupaban lugares impares (leyendo de derecha a izquierda), se representaban por el primer método, y aquellas que se encontraban en los lugares pares, eran representadas por el segundo método. Por ejemplo, los números 78639, 4576 y 1287 se representaban en el tablero de calcular como se ve en la fig. 17.

$$\begin{array}{c} \overline{\text{II}} \equiv \text{T} \equiv \overline{\text{III}} = 78639 \\ \equiv \overline{\text{III}} \equiv \text{T} = 4576 \\ - \text{II} \equiv \text{T} = 1287 \end{array}$$

Figura 17. Ejemplos de construcción de algunos números en la tabla china de operaciones (o cálculos)

Ahora veremos cómo se llevaban a cabo, de acuerdo con este tablero de calcular, las operaciones de la adición, y de la multiplicación.

**Adición.** Consideremos que se desea hallar la suma de los dos números 9876 y 5647. Primeramente se les representa en el tablero de operaciones:

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{\text{III}} & \overline{\text{III}} & \text{T} & \text{T} & & \overline{\text{III}} & \text{T} & \overline{\text{II}} \\ 9 & 8 & 7 & 6 & + & 5 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$

Cuadro 8

La adición se realizaba empezando con los órdenes superiores, es decir, desde la izquierda.

**1<sup>er</sup> Paso:** Sumemos los millares

$$9 + 5 = 14$$

Representamos esto así:

$$\begin{array}{cccc} \overline{\text{III}} & \overline{\text{III}} & \text{T} & \text{T} \\ \overline{\text{III}} & \overline{\text{III}} & \text{T} & \text{T} \\ \hline \overline{\text{III}} & \overline{\text{III}} & \text{T} & \text{T} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{T} & \overline{\text{III}} & \overline{\text{II}} \quad (2) \\ \overline{\text{III}} & \text{T} & \overline{\text{III}} \quad (1) \end{array}$$

Cuadro 9

es decir. sobre los sumandos formamos un segundo renglón y a la izquierda, arriba de la cifra 9, escribimos 14 en tal forma, que la cifra 4 esté estrictamente arriba de la cifra 9, y parte restante

del primer sumando la transcribimos sin modificaciones. Sobre el segundo sumando repetimos todas sus cifras, excepto la cifra 5 ya utilizada.

**2<sup>do</sup> Paso:** Sumemos las centenas

$$8 + 6 = 14$$

y puesto que obtenemos en la adición una unidad de mayor orden, la agregarnos a la suma anteriormente obtenida.

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \\ 1 \ 4 \\ \hline 1 \ 5 \ 4 \end{array}$$

así, el tercer renglón quedará (los primeros dos se repiten intactos)



Cuadro 10

en el tercer renglón a la izquierda se escribe 154, y después se repiten las dos últimas cifras (76) del primer sumando: a la derecha están repetidas las dos últimas cifras (47) del segundo sumando (sus cifras restantes ya han sido utilizadas).

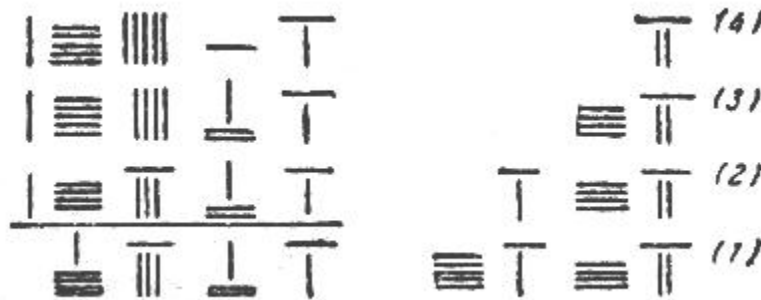
**3<sup>er</sup>. Paso:** Sumemos las decenas

$$7 + 4 = 11,$$

con lo que el siguiente resultado es

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 4 \\ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 5 \ 5 \ 1 \end{array}$$

el número 1551 se escribe a la izquierda, en el cuarto renglón:



Cuadro 11

**4º Paso:** ahora, falta solamente sumar las unidades

$$6 + 7 = 13$$

y la suma de los dos números dados se determina : es igual a 15523:

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 5 \ 1 \\ \phantom{1 \ 5 \ 5 \ 1} 1 \ 3 \\ \hline 1 \ 5 \ 5 \ 2 \ 3 \end{array}$$

el número 15523 obtenido, está escrito en el quinto renglón de la columna izquierda, y el esquema de la adición, finalmente, tiene el aspecto representado en la fig. 18

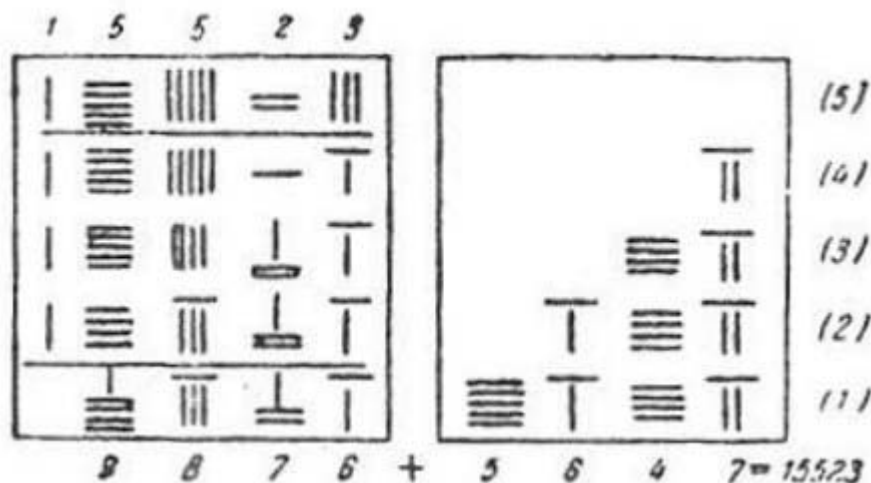


Figura 18. En este dibujo se representa la suma de dos números, 9876 y 5647, según el tablero chino de cálculo

**Multiplicación.** En el tablero de operaciones de la antigua China, la multiplicación se iniciaba con las cifras de orden superior, pasando gradualmente a las cifras de órdenes menores. Además, ya se empleaban las tablas de multiplicar.

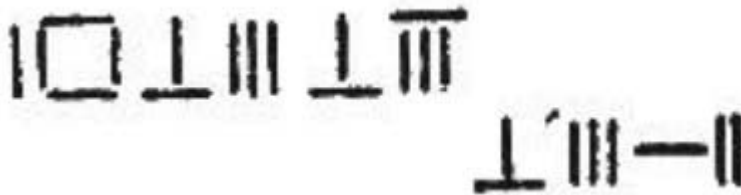
Supongamos, a título de ejemplo, que se trata de multiplicar 346 por 27. El proceso de la multiplicación en la tabla de operaciones observado en nuestras notaciones, tomaba aproximadamente el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{r}
 3 \ 4 \ 6 \\
 \times \ 2 \ 7 \\
 \hline
 6 \\
 2 \ 1 \\
 8 \\
 2 \ 8 \\
 1 \ 2 \\
 4 \ 2 \\
 \hline
 9 \ 3 \ 4 \ 2
 \end{array}$$

Primeramente, multiplicamos 3 por 2 y obtenemos 6; es decir, la cifra del orden más alto del producto (número de millares). Después, multiplicamos, 3 por 7 y 4 por 2, obteniendo 21 y 8 centenas; los escribimos debajo de la cifra 6, considerando los órdenes, como está indicado. Luego, multiplicamos 4 por 7 y 6 por 2 (esto nos da los números de 28 y 12), y finalmente, multiplicamos 7 por 6 para obtener 42 unidades: sumando las anteriores cantidades, obtenemos 9342.

El tablero de calcular y los métodos de operar con él, se conservaron en China hasta el siglo XIII. En esta época se empezó a emplear el cero, el que con ayuda de los palitos de calcular se representaba en forma de cuadrado.

Entonces, ya se podían representar también las fracciones decimales en el tablero de calcular. Por ejemplo, los números 106 368 y 6312 se representaban aproximadamente como se muestra en la finura 19.

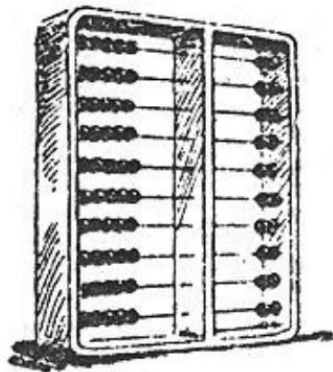


*Figura 19. Ejemplo de construcciones en la tabla de operaciones china. La combinación de los números 106 368 y 6312*

En el siglo XV, en China y Japón ya se empleaba, para las cuatro operaciones aritméticas, un ábaco de siete bolitas en cada alambre (llamado en China "suang-pang"<sup>1</sup>, y en Japón "Soroban") (ver la fig. 20). Estos aparatos de calcular se han conservado hasta nuestros días y su empleo es muy popular.

<sup>1</sup> El ábaco suang pang se llegó a construir en miniaturas (17 mm. x 8 mm.), y también se construyeron de 6 bolitas de cinco de un lado y una del otro: el número de alambres, (o renglones) llegaba a 21.





*Figura 20. Abaco usado en China y Japón, con siete bolitas de marfil en cada alambre*

He aquí por ejemplo, la opinión de un científico japonés: A pesar de su antigüedad, el sorobán supera a todos los aparatos de cálculo modernos, gracias a su facilidad de manejo, a lo simple del dispositivo y a su bajo costo.

### **El Abaco Ruso**

Hay algunos objetos útiles que no valoramos lo suficiente debido a su constante manejo, lo que los ha convertido en objetos demasiado comunes de uso doméstico. Al grupo de tales objetos insuficientemente estimados pertenece nuestro ábaco: aparato de cálculo popular ruso que representa en sí, una modificación del famoso "ábaco" o "tablero de cálculo", de nuestros remotos antecesores.

Mientras tanto, Occidente casi no sabe acerca de los ábacos, y únicamente en las escuelas superiores existen enormes ábacos: Un medio práctico escolar en la enseñanza de la numeración. Tenemos razón al enorgullecernos de nuestros ábaco de calcular, puesto que gracias a su dispositivo sorprendentemente sencillo, y con base en los resultados que pueden lograrse en ellos, pueden competir, en ciertos aspectos, inclusive con máquinas calculadoras. En unas manos hábiles, este sencillo aparato hace con facilidad, verdaderas maravillas. Un especialista que trabajó antes de la revolución en una gran firma rusa vendedora de máquinas calculadoras, me contó que en más de una ocasión tuvo oportunidad de observar la admiración que despertaban los ábacos ruso en extranjeros importadores de modelos de mecanismos calculadores complicados. En vez de multiplicar por 7, multiplíquese el multiplicando por 10 y luego réstese el mismo tres veces.

La multiplicación por 8 da el mismo resultado que, restar el doble del multiplicando al producto de la multiplicación por diez.

Para multiplicar por 9, multiplíquese por diez y réstese el multiplicando.

Para multiplicar por 10, basta elevar todo el número un renglón.

El lector, probablemente ya por sí mismo, comprende cómo es necesario proceder en la multiplicación por números mayores de 10 y qué clase de substituciones resultan las más convenientes. Así, en vez de 11 se usará  $10 + 1$ , en vez de 12,  $10 + 2$ .

Consideremos algunos casos especiales para multiplicadores de la primera centena:

$$\begin{array}{ll} 20 = 10 \times 2 & 32 = 22 + 10 \\ 22 = 11 \times 2 & 42 = 22 + 20 \\ 25 = (100:2):2 & 43 = 33 + 10 \end{array}$$

$$26 = 25 + 1$$

$$27 = 30 - 3$$

$$46 = 50 - 5$$

$$63 = 33 + 30 \text{ etc.}$$

Como se ve, con ayuda de los ábacos es más sencilla la multiplicación por 22, 33, 44, 55, etc., que por otros números: por tal razón, es necesario tratar de aprovecharse, en la descomposición de los multiplicadores, de número, semejantes con idénticas cifras.

A métodos similares se recurre también en la multiplicación por números mayores que 110. Si tales métodos artificiales resultan agotadores, siempre podremos recurrir a multiplicar, con ayuda de los ábacos, conforme a una regla general que consiste en multiplicar cada cifra del multiplicador, y escribir los productos parciales. Esto, desde luego, proporciona una reducción de tiempo.

### La División en el Abaco

Naturalmente, la división en el ábaco es más difícil que la multiplicación; para esto es necesario recordar una serie de métodos especiales, a veces bastante complicados. A quienes se interesen en ellos, les sugerimos, que consulten un manual especializado. Aquí indicamos sólo lo referente a un ejemplo de los métodos adecuados de la división por números de la primera decena (excepto el número 7, con el cual el método de división es demasiado complicado).

Sabernos ya cómo dividir entre 2 lo cual es muy simple.

El método de división entre 3 es más complicado y consiste en multiplicar por la fracción periódica infinita  $0.3333\ldots$  (se sabe que  $0.333\ldots = 1/3$ ). Sabemos multiplicar, con ayuda del ábaco, por 3; también podemos disminuir en 10 veces; así pues, es necesario solamente, trasladar el dividendo un alambre hacia abajo. Después de breves ejercicios, este método de división entre 3 a primera vista muy largo se muestra muy adecuado en la práctica.

La división entre 4, naturalmente, equivale a dividir 2 veces entre 2.

Más fácil aún es la división entre 5: basta duplicar, y dividir entre 10.

Entre 6, hay que seguir dos pasos: dividir entre 2, y luego entre 3

La división entre 7 es muy complicada con el ábaco, por lo que aquí no hablaremos de ella.

La división entre 8 equivale a dividir tres veces entre 2.

Es muy interesante la división entre 9. Sabemos que  $1/9 = 0.11111\ldots$  Está claro aquí que, en lugar de la división entre 9 se pueden sumar sucesivamente 0.1 del dividendo + 0.01 del mismo x 0.001 ... etc.<sup>2</sup>

Como se ve es muy fácil dividir entre 2, 10 y 5, y naturalmente entre sus números múltiplos 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Estos casos de la división, no representan obstáculo incluso para el que tiene poca experiencia en el manejo del ábaco.

Volver

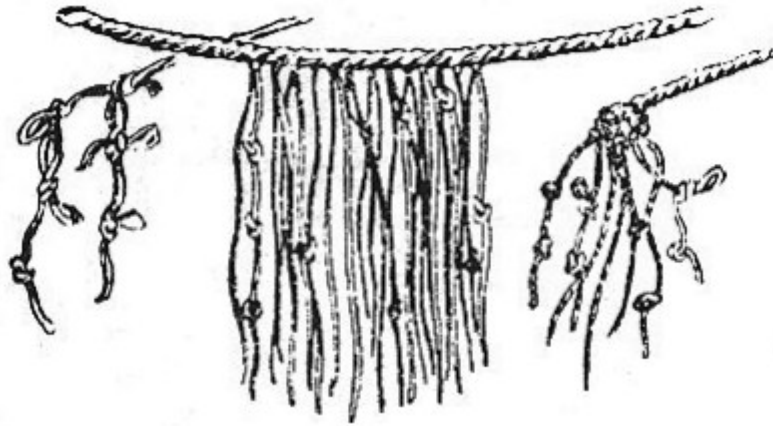
### 3. Ecos de la Antigüedad

Cierto vestigios de la antigüedad, tanto en el lenguaje, como en las costumbres están relacionados con los más remotos antecesores de nuestros ábacos de calcular. Pocos sospechan, por ejemplo, el origen de lo que a veces hacemos "para la memoria" al anudar un pañuelo.

Con esto, repetimos lo que con sentido común hacían antiguamente nuestros antecesores, "escribiendo" sobre cordeles el total de un cálculo. Una serie de correas o cuerdas con nudos efectuados a lo largo de ella, representaba en sí un aparato de calcular (fig. 21) en principio, análogo al ábaco. Esto constituye el "ábaco de cuerda" peruano denominado "quipos". Un nudo

<sup>2</sup> Este método es útil también para la división oral entre 9

hecho una sola vez sobre la cuerda, denotaba 10: dos veces, 100: tres veces 1000, y así sucesivamente.



*Figura 21. Aparatos de calcular usados por los antiguos peruanos, llamados "quipos"*

Palabras como "banco" y "cheque" tan difundidas actualmente están relacionadas con el ábaco. En alemán "bank" significa banco, escaño, silla.

¿Qué hay de común entre la institución financiera "bank" en el sentido moderno de la palabra y el banco o escaño?. Lo que aquí se señala, está lejos de ser una simple coincidencia de nombres. El ábaco en forma de banco tuvo una amplia difusión en los círculos comerciales de Alemania en los siglos XV y XVI; cada banco de cambio u oficina bancaria, se caracterizaba ante todo por la presencia de un "banco de contabilidad".

Una relación más indirecta con el ábaco, tiene la palabra "check" (cheque); es de origen inglés y procede del verbo "checker" (registrar, revisor); "checkered" (registrado, cotejado) se llamaba a una servilleta de cuero rayado, en forma de ábaco, que en los siglos XVI y XVII los comerciantes ingleses portaban consigo en forma enrollada, y en el caso que se necesitase efectuar cuentas, la desplegaban sobre una mesa. Las formas para los cálculos se rayaban según el modelo de esto, ábacos enrollados, y no es extraño que fuera transferido a ellas, en forma abreviada, el nombre de estos aparatos de calcular: de la palabra "checkered" se originó la palabra "check".

Es curioso que de aquí se haya originado la expresión "se quedó con un palmo de narices" la cual la aplicamos actualmente al hombre que ha perdido todo su dinero. Esto también se relaciona con la época en que todos los cálculos monetarios se realizaban sobre el ábaco, por medio de habichuelas que sustituían a las cuentas de nuestros ábacos. En la obra "El Estado del Sol" de Campanella (1602) leemos: "Uno calcula con piedrecillas, el otro con habichuelas. Un hombre, habiendo perdido su dinero, se quedaba con unas habichuelas que representaban la suma de su pérdida: de aquí precisamente el correspondiente giro del lenguaje.

[Volver](#)

#### 4. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$

$$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$$

$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$

[Volver](#)