ΑΣΚΗΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δύο τροχοί βρίσκονται με τα επίπεδά τους σε κατακόρυφη θέση και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από σταθερούς οριζόντιους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα τους O_1 και O_2 αντίστοιχα. Ο τροχός 1 έχει δύο αυλάκια στην περιφέρεια. Στο ένα είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα στην άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m. Στο άλλο αυλάκι τυλίγεται νήμα το οποίο τον συνδέει με τον τροχό 2 καθώς τυλίγεται και στο δικό του αυλάκι. Σημείο της επιφάνειας του τροχού 2 και σε οριζόντια απόσταση $r = \frac{R_2}{2}$ από το κέντρο O_2 συνδέεται με κατακόρυφο νήμα σ' ένα σταθερό βάθρο κι' έτσι το σύστημα ισορροπεί.

Όλα τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά.

Δίνονται: $M_1 = 6Kg$, $R_1 = 0{,}2m$, $M_2 = 2Kg$, $R_2 = 0{,}1m$ και $m = 1Kg$

Επίσης: $g = 10\, m/s^2$ και $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

Α. Να βρεθεί η τάση του κατακόρυφου νήματος που συνδέει τον τροχό 2 με το βάθρο.

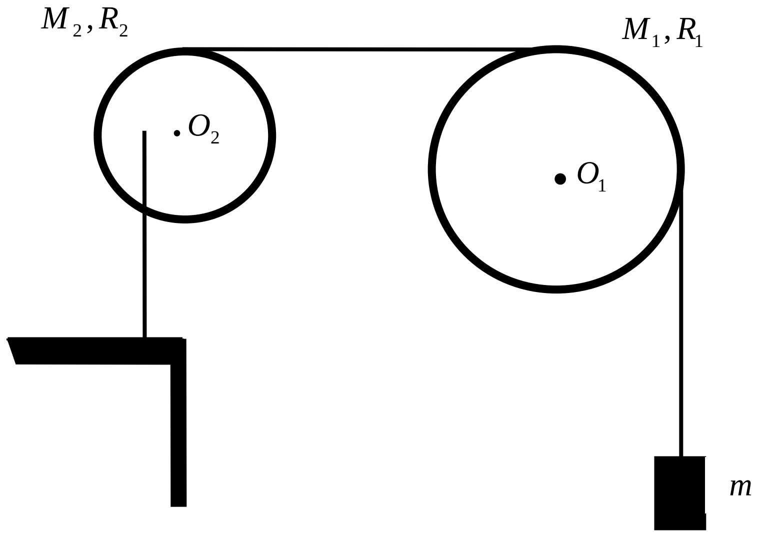
Β. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα, που συνδέει τον τροχό 2 με το βάθρο, οπότε το σύστημα μπαίνει σε κίνηση.

Β$_1$. Να βρεθεί η επιτάχυνση καθόδου του σώματος μάζας m.

Β$_2$. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού 2 όταν το σώμα μάζας m έχει κατέβει κατά $y_1 = 4m$.

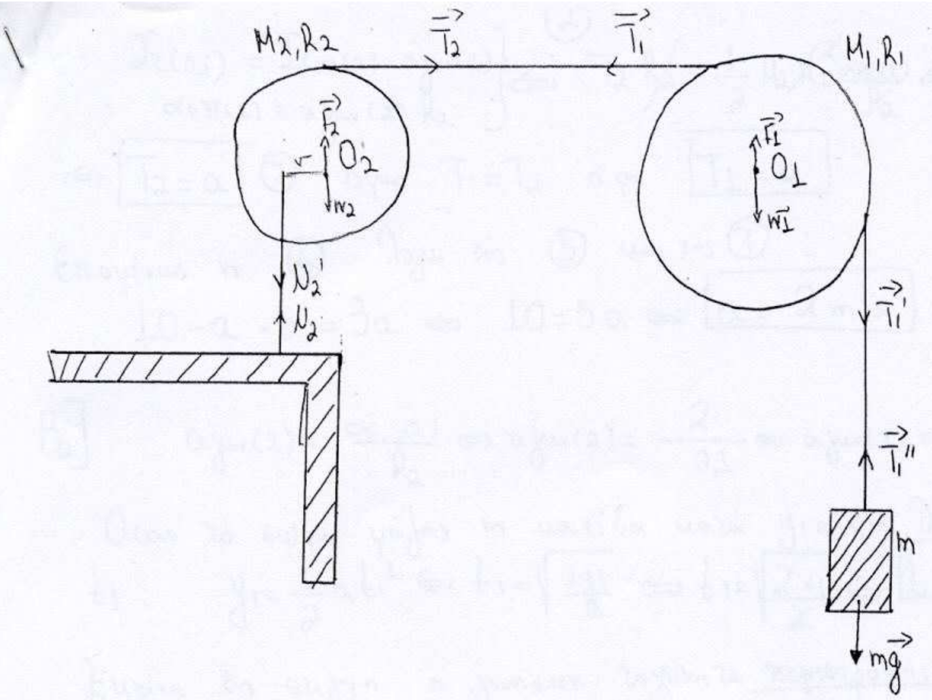
Γ. Ας δεχθούμε τώρα ότι τη στιγμή που το σώμα κατέβηκε κατά $y_1 = 4m$, το νήμα που συνδέει τους δύο τροχούς έχει ξετυλιχτεί τελείως και επομένως ο τροχός 2 περιστρέφεται ελεύθερα.

Να βρεθεί το ύψος καθόδου y_2 του σώματος μάζας m από τη στιγμή που το νήμα ξετυλίχτηκε και μέχρις ότου ο τροχός 2 κάνει, ελεύθερα περιστρεφόμενος, $N = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΗ



① Γ' Λυκείου

Α]. Επειδή τα νήματα είναι αβαρή ισχύουν:

$T_1' = T_1''$ ①

$T_1 = T_2$ ②

$N_2' = N_2$ ③

Αφού αρχικά το σύστημα των δυο τροχών και του σώματος ισορροπεί ισχύουν τα εξής:

$m: \ \Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow mg = T_1'' \Leftrightarrow T_1'' = 1\cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{T_1'' = 10N}$

$M_1: \ \Sigma\tau(O_1) = 0 \Leftrightarrow -\tau_{T_1'} + \tau_{T_1} = 0 \Leftrightarrow T_1' \cdot R_1 = T_1 \cdot R_1 \Leftrightarrow \boxed{T_1' = T_1 \overset{①}{=} T_1'' = 10N}$

* $\tau_{w_1} = 0$ και $\tau_{F_1(O_1)} = 0$ γιατί οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται απο το άξονα περιστροφής

$M_2:$

$\Sigma\tau(O_2) = 0 \Leftrightarrow \tau_{N_2'} - \tau_{T_2} = 0 \Leftrightarrow N_2' \cdot \frac{\cancel{R_2}}{2} = T_2 \cdot \cancel{R_2} \Leftrightarrow N_2' = 2T_2 \overset{②}{\Leftrightarrow} N_2' = 2T_1$

$\Leftrightarrow N_2' = 2\cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{N_2' = 20N}$. Λόγω όμως της σχέσης ③ Τελικά $\boxed{N_2 = 20N}$

* $\tau_{w_2(O_2)} = 0$ και $\tau_{F_2(O_2)} = 0$ γιατί οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από τον άξονα περιστροφής.

Β]. B_1. Όταν κόψουμε το νήμα που συνδέει τον τροχό 2 με το βάθρο το σύστημα θα επιταχυνθεί με $\alpha_{επ(1)} = \alpha_{επ(2)} = a$.

$m: \ \Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Leftrightarrow mg - T_1'' = m\cdot a \overset{①}{\Leftrightarrow} mg - T_1' = m\cdot a \Leftrightarrow 1\cdot 10 - T_1' = 1\cdot a \Leftrightarrow \boxed{10 - T_1' = a}$ ⑤

$M_1: \ \left.\begin{array}{l} \Sigma\tau(O_1) = I_{cm(1)} \cdot a_{γων(1)} \\ \alpha_{επ(1)} = a_{γων(1)} \cdot R_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (T_1' - T_1)\cdot \cancel{R_1} = \frac{1}{2} M_1 \cancel{R_1^2} \frac{\alpha_{επ(1)}}{\cancel{R_1}} \Leftrightarrow T_1' - T_1 = \frac{M_1 \cdot a}{2} \Leftrightarrow T_1' - T_1 = \frac{6\cdot a}{2} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{T_1' - T_1 = 3\cdot a}$ ⑥

(2)

$$M_2: \left.\begin{array}{l} \Sigma\tau_{(O_2)} = I_{cm(2)}\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} \\ \alpha_{\varepsilon\pi(2)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}\cdot R_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow T_2 \cancel{R_2} = \frac{1}{2} M_2 R_2^{\cancel{2}} \frac{\alpha_{\varepsilon\pi(2)}}{\cancel{R_2}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{M_2\cdot\alpha}{2} \Leftrightarrow T_2 = \frac{2\cdot\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_2 = \alpha} \ (7) \quad \text{όμως } T_1 = T_2 \text{ άρα } \boxed{T_1 = \alpha}$$

Επομένως η (6) λόγω της (5) και της (7):

$$10 - \alpha - \alpha = 3\alpha \Leftrightarrow 10 = 5\cdot\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2\, m/s^2}$$

B2] $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \dfrac{\alpha_{\varepsilon\pi(2)}}{R_2} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \dfrac{2}{0{,}1} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 20\, rad/s^2$

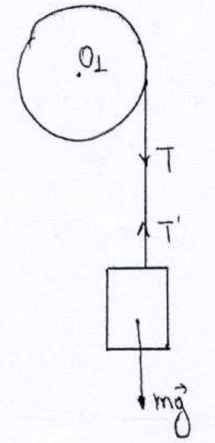
Όταν το σώμα μάζας m κατέβει κατά $y_1 = 4m$, θα έχει μεσολαβήσει χρόνος t_1:

$$y_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{\alpha}} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}}} \Leftrightarrow \boxed{t_1 = 2\, sec}$$

Εκείνη τη στιγμή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού 2 θα είναι:

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(2)}\cdot t_1 \Leftrightarrow \omega_2 = 20\cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{\omega_2 = 40\, rad/s}$$

Γ] Όταν ο τροχός 2 περιστρέφεται ελεύθερα, διατηρεί πλέον σταθερή τη γωνιακή του ταχύτητα. $\alpha_{\varepsilon\pi(1)}' = \alpha'$



$$m: \ \Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}' \Leftrightarrow mg - T' = m\cdot\alpha' \Leftrightarrow 1\cdot 10 - T' = 1\cdot\alpha' \Leftrightarrow$$

$$\boxed{10 - T' = \alpha'} \ (8)$$

$$M_1: \left.\begin{array}{l} \Sigma\tau_{(O_1)} = I_{cm(1)}\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}' \\ \alpha_{\varepsilon\pi(1)}' = \alpha_{\gamma\omega\nu(1)}'\cdot R_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow T\cdot\cancel{R_1} = \frac{1}{2} M_1 R_1^{\cancel{2}} \frac{\alpha_{\varepsilon\pi(1)}'}{\cancel{R_1}} \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{M_1\alpha'}{2} \Leftrightarrow T = \frac{6\cdot\alpha'}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = 3\cdot\alpha' \ (9)}$$

$$\text{Όμως } T' = T \text{ άρα } (8) \overset{(9)}{\Rightarrow} 10 - 3\alpha' = \alpha' \Leftrightarrow$$

$$10 = 4\alpha' \Leftrightarrow \boxed{\alpha' = 2{,}5\, m/s^2}$$

Όταν ο τροχός 2 κάνει $N = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές, θα έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = N\cdot 2\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{20}{\pi}\cdot 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\theta = 40\, rad}$ και θα έχει περάσει χρόνος $\Delta t_2 = \dfrac{\theta}{\omega_2} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \dfrac{40}{40} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t_2 = 1\, sec}$

Το σώμα μάζας m είχε αρχική ταχύτητα: $\upsilon = \alpha\cdot t_1 \Leftrightarrow \upsilon = 2\cdot 2 \Leftrightarrow \upsilon = 4\, m/s$. Επομένως το ύψος καθόδου του m θα είναι:

$$\Delta y = \upsilon\cdot\Delta t_2 + \frac{1}{2}\alpha'\cdot\Delta t_2^2 \Leftrightarrow y_2 = 4\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 1^2 \Leftrightarrow \boxed{y_2 = 5{,}25\, m}$$