

14.- Oscilaciones amortiguadas y forzadas.

§14.1. Rozamiento (398); §14.2. Oscilador armónico amortiguado (399); §14.3. Amortiguamiento débil (400); §14.4. Disipación de energía (402); §14.5. Factor de calidad (404); §14.6. Amortiguamiento crítico (405); §14.7. Sobreamortiguamiento (406); §14.8. Oscilaciones forzadas (407); §14.9. Absorción de potencia. Resonancia (412); §14.10. Impedancia de un oscilador (420); Problemas (424)

Hemos estudiado en la lección anterior las *oscilaciones libres* del oscilador armónico simple. Esto es, cuando el movimiento del oscilador es tal que sus oscilaciones, una vez iniciadas, continúan indefinidamente con la misma amplitud. En las oscilaciones libres, la energía total permanece constante. Por supuesto que las oscilaciones libres no constituyen, por lo general, una situación física real, ya que normalmente existirá una disipación de energía (debido a la presencia de fuerzas de rozamiento, por ejemplo), de modo que la energía del oscilador, y por ende la amplitud de sus oscilaciones, irá disminuyendo continuamente hasta que, finalmente, cesa el movimiento. Hablamos entonces de *oscilaciones amortiguadas*, en contraposición a las oscilaciones libres.

Podemos evitar el amortiguamiento de las oscilaciones si disponemos de algún mecanismo capaz de suministrar energía al oscilador al mismo ritmo que éste la va cediendo al medio resistivo donde tiene lugar el movimiento. Hablamos entonces de *oscilaciones forzadas*. Un oscilador forzado es aquél que está accionado por una fuerza externa que realiza un trabajo sobre él. Por ejemplo, un columpio que reciba un impulso en cada oscilación constituye un oscilador forzado. En este ejemplo, la fuerza externa es una *fuerza impulsiva y periódica*, cuyo efecto es suministrar energía al sistema oscilante para compensar la que pierde por rozamiento, de modo que se mantenga constante la amplitud de las oscilaciones. Evidentemente, si el ritmo con que la fuerza externa suministra energía al sistema oscilante es mayor que el ritmo con que éste la disipa, la energía del oscilador y la amplitud de sus oscilaciones irán aumentando hasta que (siempre que haya amortiguamiento) se alcance un estado estacionario.

Estos son los aspectos que nos proponemos desarrollar en esta lección. En el caso del oscilador forzado, nos limitaremos a considerar fuerzas impulsoras de tipo armónico simple, y prestaremos particular interés a las condiciones de resonancia.

§14.1. Rozamiento.- Para analizar dinámicamente las oscilaciones amortiguadas debemos suponer que, además de la fuerza elástica $F=-kx$, actúa una fuerza de rozamiento. Aunque normalmente resulta muy complicado el análisis detallado de los efectos producidos por el rozamiento sobre el movimiento del oscilador, con frecuencia podemos representar esta fuerza mediante una relación empírica cuya expresión matemática es relativamente sencilla y que coincide razonablemente con los resultados experimentales. La fuerza de rozamiento es siempre opuesta a la velocidad de la partícula y, en su forma más sencilla, es directamente proporcional a dicha velocidad; esta situación se presenta cuando un cuerpo se mueve en un medio fluido (viscoso) con velocidad moderada. Entonces escribiremos

$$\mathbf{f} = -\gamma \mathbf{v} \quad [14.1]$$

donde γ es una constante positiva denominada *constante o coeficiente de amortiguamiento*. Evidentemente, esta fuerza no es conservativa, debido a que es función de la velocidad. Además, puesto que siempre está dirigida en sentido opuesto al del movimiento, el trabajo realizado por dicha fuerza es siempre negativo; se trata, pues, de una *fuerza disipativa*. Obsérvese que las dimensiones de la constante de amortiguamiento son

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1} \quad [14.2]$$

esto es, la de una masa dividida por un tiempo, expresándose en las unidades correspondientes (kg/s, g/s, ...).

Antes de iniciar el estudio de las oscilaciones amortiguadas, vamos a sacar algunas conclusiones acerca del movimiento de una partícula sobre la que actúe solamente una fuerza de rozamiento del tipo anteriormente descrito. Al ser la fuerza de rozamiento la única que actúa sobre la partícula, podemos escribir

$$f = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -\gamma\dot{x} = m\ddot{x} \quad [14.3]$$

de modo que la ecuación diferencial del movimiento de la partícula puede escribirse en la forma

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad [14.4]$$

siendo útil definir una nueva constante, τ , llamada *tiempo de relajación*, por la relación

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m} \quad [14.5]$$

que tiene dimensiones de tiempo, de modo que la ec. dif. del movimiento se escribe

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = 0 \quad [14.6]$$

En función de la velocidad, la ecuación anterior toma la forma

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad [14.7]$$

ec. dif. cuya integración nos lleva a

$$\int_{v_0}^{v'} \frac{dv}{v} = - \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad v = v_0 e^{-t/\tau} \quad [14.8]$$

La velocidad de la partícula disminuye exponencialmente con el tiempo (Figura 14.1); esto es, la velocidad está amortiguada con un *tiempo de relajación* τ . Transcurrido un tiempo $t=\tau$ será

$$v = \frac{v_0}{e} = \frac{v_0}{2.718} = 0.368 v_0$$

Así, el tiempo de relajación es el tiempo que debe transcurrir para que la velocidad de la partícula se reduzca a un 36.8% de su valor inicial.

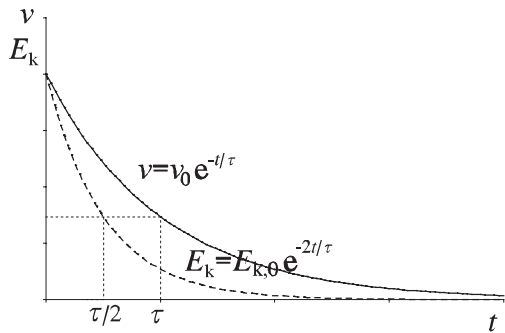


Figura 14.1

En cuanto a la energía cinética de la partícula, tenemos

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 e^{-2t/\tau} = E_{k,0} e^{-t/(\tau/2)} \quad [14.9]$$

de modo que el tiempo de relajación efectivo para la energía cinética es la mitad que para la velocidad.

§14.2. Oscilador armónico amortiguado.- Consideremos una masa m que se mueve bajo la acción conjunta de una fuerza restauradora lineal, $F=-kx$, y de una fuerza resistiva $f=-\gamma v$, como se esquematiza en la Figura 14.2; entonces la ec. diferencial del movimiento de la partícula es

$$-kx - \gamma \dot{x} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = 0 \quad [14.10]$$

que es conveniente escribir en la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad [14.11]$$

donde

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{1}{2\tau} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [14.12]$$

son, respectivamente, el *parámetro de amortiguamiento* ($[\beta]=T^{-1}$) y la *frecuencia angular¹ natural* del oscilador; esto es, la frecuencia angular de sus oscilaciones en ausencia de amortiguamiento. Observemos que β (parámetro de amortiguamiento) será tanto mayor cuanto mayor sea el grado de amortiguamiento. El cociente entre el parámetro de amortiguamiento (β) y la frecuencia angular natural (ω_0) del oscilador es una magnitud utilizada en las aplicaciones para caracterizar el grado de amortiguamiento del sistema; recibe el nombre de *factor de amortiguamiento* (ζ) y es adimensional; *i.e.*,

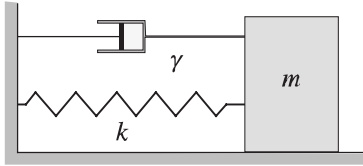


Figura 14.2

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0} \quad [14.13]$$

La ecuación del movimiento [14.11] es una *ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea* (esto es, sin segundo miembro) *y de coeficientes constantes*. La solución general de esta ec. dif. puede obtenerse mediante los métodos ordinarios de resolución de estas ecuaciones diferenciales. Sin entrar en el detalle de la resolución de la ec. dif. del movimiento [14.11], diremos que el carácter de su solución depende de los valores de los coeficientes β y ω_0 . De acuerdo con los valores relativos de β y ω_0 hemos de distinguir tres casos:

- a) Si $\beta < \omega_0$, *i.e.*, $\zeta < 1$, el amortiguamiento es *débil*.
- b) Si $\beta = \omega_0$, *i.e.*, $\zeta = 1$, el amortiguamiento es *crítico*.
- c) Si $\beta > \omega_0$, *i.e.*, $\zeta > 1$, el amortiguamiento es *supercrítico*.

A continuación vamos a estudiar por separado cada uno de estos tres casos.

§14.3. Amortiguamiento débil.- En el caso de amortiguamiento débil, esto es, $\beta < \omega_0$ (*i.e.*, $\zeta < 1$), la solución² de la ec. dif. del movimiento [14.11] es

$$x = A_0 e^{-\beta t} \text{sen}(\omega' t + \psi) \quad [14.14]$$

donde A_0 y ψ son dos constantes de integración que se determinarán a partir de las condiciones iniciales (*vide* Problema 14.1) y ω' es la *frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas*, dada por

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad [14.15]$$

¹ La *frecuencia de las oscilaciones* es $\nu = \omega/2\pi$. Preferimos utilizar la frecuencia angular para evitarnos la aparición del factor 2π en las expresiones que obtendremos. Algunos autores denominan a ω como *frecuencia* (simplemente).

² El lector deberá comprobar que la ec. [14.14] es una solución de la ec. dif. [14.11]; no hay más que sustituir [14.14] y sus derivadas en la expresión [14.11].

Aunque hemos designado a ω' con el nombre de frecuencia angular, en un sentido estricto no es posible definir una frecuencia cuando existe amortiguamiento, ya que entonces el movimiento no es periódico; esto es, el oscilador no pasa dos veces por el mismo punto con la misma velocidad (repárese en que la velocidad y la energía total del oscilador van disminuyendo conforme se van completado más y más ciclos). Cuando el amortiguamiento es *muy débil*, esto es, cuando $\beta \ll \omega_0$, entonces

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0 \quad [14.16]$$

de modo que podemos llamar "frecuencia angular" a ω' , aunque esta terminología sólo es absolutamente correcta cuando $\beta=0$. Sin embargo, para simplificar, pasaremos por alto estas consideraciones y nos referiremos a ω' como a la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, que será siempre menor que la frecuencia natural (ω_0) del oscilador. Consideraciones análogas pueden hacerse acerca del periodo de las oscilaciones amortiguadas.

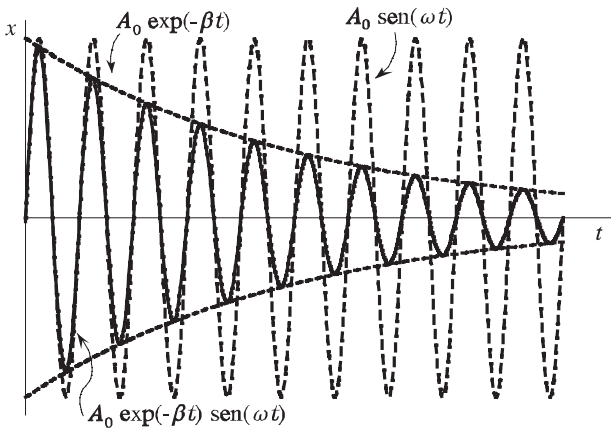


Figura 14.3

La amplitud de las oscilaciones amortiguadas no es constante, ya que está dada por

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-t/2\tau} \quad [14.17]$$

y, debido al exponente negativo, decrece a medida que transcurre el tiempo. Las curvas cuyas ecuaciones son

$$x_{env} = \pm A_0 e^{-\beta t} \quad [14.18]$$

son las envolventes de las curvas $x(t)$ en el oscilador amortiguado. En la Figura 14.3 mostramos esas curvas (trazo corto), así como las curvas de elongación para el caso en que $\beta=0$ (trazo largo). También se muestra la curva correspondiente para las oscilaciones amortiguadas ($\beta \neq 0$) (línea continua). Se observará que, aunque la frecuencia correspondiente a las oscilaciones amortiguadas (ω') es siempre menor que la correspondiente a las oscilaciones libres (ω_0), dicha diferencia de frecuencias suele ser en la práctica muy pequeña (incluso para un amortiguamiento relativamente fuerte) y difícil de apreciar.

Obsérvese que, como por definición es $\beta=1/2\tau$, el tiempo de relajación efectivo para la amplitud es $\tau_A=1/\beta=2\tau$ (como veremos más adelante, τ es el tiempo de relajación correspondiente a la energía).

El grado de amortiguamiento del oscilador depende exclusivamente del valor del parámetro de amortiguamiento β y en definitiva de $\gamma=2m\beta$. Podemos determinar experimentalmente el valor de β midiendo las amplitudes de dos oscilaciones consecutivas, ya que

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad A(t+T') = A_0 e^{-\beta(t+T')} \quad [14.19]$$

de modo que, dividiendo miembro a miembro esas dos expresiones, tenemos

$$\frac{A(t)}{A(t+T')} = e^{\beta T'} \quad [14.20]$$

con $T'=2\pi/\omega'$. La cantidad $\exp(\beta T')$ recibe el nombre de *decremento de la amplitud*; su logaritmo neperiano, o sea $\beta T'$ recibe el nombre de *decremento logarítmico*; esto es,

$$\Delta = \beta T' = \frac{\pi}{\tau \omega'} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T')} \quad [14.21]$$

Vemos que el amortiguamiento será *muy débil* si $\tau \omega' \approx \tau \omega_0 \gg 1$.

§14.4. Disipación de energía.- En contraste con el oscilador armónico simple, en el oscilador amortiguado la energía no se mantiene constante. La energía del oscilador amortiguado se transfiere gradual y continuamente al medio resistivo y es disipada en forma de calor o de radiación. La energía disipada por unidad de tiempo (*potencia disipada*) será proporcional al cuadrado de la velocidad, por ser la fuerza de rozamiento ($f=-\gamma v$) la responsable de tal disipación de energía, de modo que

$$P = \frac{dE}{dt} = f v = -\gamma v^2 \quad [14.22]$$

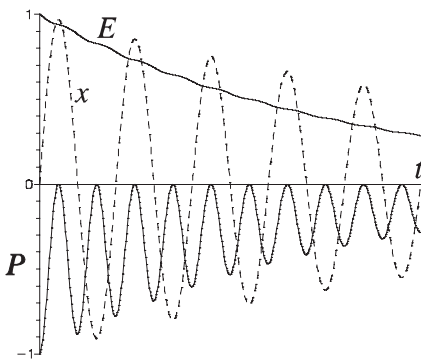


Figura 14.4

Así pues, la energía del oscilador no se disipa de modo uniforme. La energía disipada por unidad de tiempo será máxima cuando el oscilador adquiera su velocidad máxima, cosa que ocurre cuando *está cerca* (pero no exactamente *en*) de la posición de equilibrio. La energía disipada por unidad de tiempo será nula cuando, en cada oscilación, el oscilador alcanza las posiciones de elongación máxima, ya que entonces su velocidad es nula. Estos hechos se reflejan en las gráficas de la Figura 14.4.

Calcularemos ahora el valor de la energía que se disipa en cada oscilación. Escribiremos primero las expresiones correspondientes a la elongación y a la velocidad de la partícula oscilante

$$x = A_0 e^{-\beta t} \text{sen} \omega' t \quad \dot{x} = A_0 e^{-\beta t} (\omega' \text{cos} \omega' t - \beta \text{sen} \omega' t) \quad [14.23]$$

donde hemos hecho $\psi=0$, sin que por ello perdamos generalidad en nuestras valoraciones. Obsérvese que el tiempo de relajación efectivo para la velocidad es el mismo que para la amplitud.

Puesto que las energías cinética y potencial viene dadas por

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad [14.24]$$

tenemos

$$E_k = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} (\omega'^2 \text{cos}^2 \omega' t + \beta^2 \text{sen}^2 \omega' t - 2\omega' \beta \text{sen} \omega' t \text{cos} \omega' t) \quad [14.25]$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \text{sen}^2 \omega' t = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \text{sen}^2 \omega' t$$

Tanto la energía cinética como la potencial son función del tiempo y disminuyen conforme se completan más y más ciclos. Al calcular los valores medios temporales de las energías cinética y potencial, esto es $\langle E_k \rangle$ y $\langle E_p \rangle$, podemos aceptar sacar fuera de los corchetes angulares (que representan medias respecto al tiempo) el factor $\exp(-2\beta t)$. Podemos hacerlo, con razonable aproximación, siempre que el amortiguamiento sea suficientemente débil ($\beta T' \ll 1$), ya que entonces la amplitud de la oscilación no cambia mucho en el transcurso de un ciclo.

Nos aparecerán las medias (extendidas a un ciclo) de las funciones $\text{sen}^2 \omega t$, $\text{cos}^2 \omega t$ y $\text{sen} \omega t \text{cos} \omega t$; *i.e.*,

$$\langle \text{sen}^2 \omega' t \rangle = \langle \text{cos}^2 \omega' t \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \text{sen} \omega' t \text{cos} \omega' t \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{sen} 2\omega' t \rangle = 0 \quad [14.26]$$

y las energías cinética y potencial promediadas en el tiempo de un ciclo son

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} \left(\frac{\omega'^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \quad [14.27]$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}$$

de modo que
$$\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-t/\tau} = \langle E_k \rangle_{\beta=0} e^{-t/\tau} \quad [14.28]$$

donde hemos puesto de manifiesto que el tiempo de relajación efectivo para la energía (cinética o potencial) es τ , o sea, la mitad del correspondiente a la elongación o a la velocidad.

La energía total almacenada en el oscilador va disminuyendo gradualmente. Su valor medio en un ciclo es

$$\langle E \rangle = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-t/\tau} = \langle E \rangle_{\beta=0} e^{-t/\tau} \quad [14.29]$$

Así pues, la energía decrece exponencialmente con el tiempo a un ritmo doble que la amplitud o la velocidad.

La disipación media de potencia viene dada por la variación de la energía total del oscilador por unidad de tiempo. Esto es, de [14.29] se sigue

$$\langle P \rangle = \frac{d\langle E \rangle}{dt} = - \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-t/\tau} \quad [14.30]$$

resultando que

$$\langle P \rangle = - \frac{d\langle E \rangle}{dt} = - 2\beta \langle E \rangle \quad [14.31]$$

Puede parecer sorprendente que las medias temporales de las energías cinéticas, potencial y total (expresiones [14.27] y [14.29]) sean función del tiempo t , cuando esas medias lo son precisamente respecto al tiempo. Hemos de tener muy presente que estamos observando el movimiento de un oscilador amortiguado a lo largo de muchos ciclos de su movimiento y que esas expresiones corresponden a las energías medias en un ciclo, expresadas en el instante t . Como la energía se va disipando, es de esperar que dichos valores medios (en un ciclo) vayan disminuyendo según se vayan completando más ciclos.

§14.5. Factor de calidad.- Es frecuente caracterizar un sistema oscilante por su Q *factor de calidad*. El factor de calidad de un sistema oscilante se define como 2π veces la razón entre la energía almacenada y la disipada por ciclo. Esto es

$$Q = 2\pi \frac{\langle \text{energía almacenada} \rangle}{\langle \text{energía disipada por ciclo} \rangle} \quad [14.32]$$

o sea

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T} = \omega' \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{\omega'}{2\beta} = \omega' \tau \quad [14.33]$$

Obsérvese que Q carece de dimensiones. En el caso de que el amortiguamiento sea muy débil, tenemos

y vemos que Q es una buena medida de la falta de amortiguamiento. Valores de Q (o de $\omega_0 \tau$) altos representan un amortiguamiento muy débil. Recordemos que τ es el tiempo de relajación correspondiente a la energía; durante ese tiempo, el oscilador realiza

Tabla 14.1.- Valores representativos del factor de calidad (Q).

SISTEMA OSCILANTE	Q
La Tierra, para ondas sísmicas	250-1400
Cuerda de piano o de violín	10^3
Átomo excitado	10^7
Núcleo excitado	10^{12}

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\omega' \tau}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \text{ oscilaciones} \tag{14.35}$$

En la Tabla 14.1 mostramos algunos valores representativos del Q para algunos sistemas oscilantes.

§14.6. Amortiguamiento crítico.- Si el amortiguamiento del oscilador aumenta suficientemente, puede llegar a ser $\beta=\omega_0$ (i.e., $\zeta=1$); entonces, de acuerdo con la definición [14.15] de la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas será $\omega'=0$. Evidentemente, en estas condiciones no hay oscilaciones (ya que el periodo de las mismas sería infinito) y el oscilador regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o, a lo más, rebasándola una sola vez. La condición de $\beta=\omega_0$ se conoce con el nombre de *amortiguamiento crítico del oscilador*; i.e., se ha alcanzado un valor crítico para el amortiguamiento en el que las oscilaciones desaparecen.

En el caso de que $\beta=\omega_0$, es obvio que la ecuación [14.14] no representará una solución general de la ec. dif. del movimiento del oscilador amortiguado [14.11]. Cuando $\beta=\omega_0$, la solución de la ec. dif. [14.11] es de la forma

$$x = (A_0 + A_1 t) e^{-\beta t} \tag{14.36}$$

que el lector deberá comprobar, sustituyéndola en la ec. dif. [14.11]. En la función [14.36], A_0 y A_1 son dos constantes de integración, que pueden expresarse en función de las condiciones iniciales; esto es, de la posición x_0 y de la velocidad v_0 de la partícula en el instante inicial. Es fácil comprobar que

$$A_0 = x_0 \qquad A_1 = v_0 + \beta x_0 \tag{14.37}$$

En la Figura 14.5 hemos representado gráficamente las curvas elongación-tiempo para un oscilador con amortiguamiento crítico para $x_0 \neq 0$ y diversos valores de la velocidad inicial v_0 . Obsérvese como, dependiendo del valor inicial de la velocidad, puede rebasarse la posición de equilibrio antes de que la partícula se aproxime asintóticamente a ella. El lector deberá trazar la gráfica correspondiente a las condiciones iniciales $x_0=0$, $v_0 \neq 0$.

Para unas determinadas condiciones iniciales, un oscilador con amortiguamiento crítico se aproxima más rápidamente la posición de equilibrio que uno sobreamortiguado o infraamortiguado. Este hecho es muy importante cuando se diseñan ciertos mecanismos oscilantes (un galvanómetro, por ejemplo) en los que se desea que el mecanismo regrese suave y rápidamente a su posición de equilibrio. Como otro ejemplo de sistema con amortiguamiento crítico o casi-crítico citaremos el sistema de suspensión de un vehículo automóvil; esto puede comprobarse empujando hacia abajo la parte delantera o trasera de un automóvil (a fin de comprimir los amortiguadores) y observando que se producen una o dos oscilaciones antes de que el sistema quede en reposo.

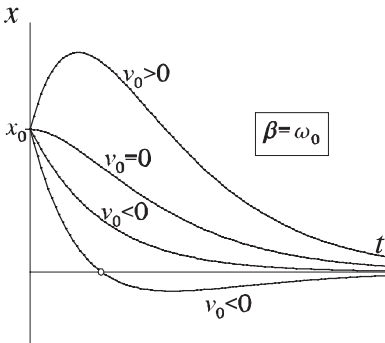


Figura 14.5

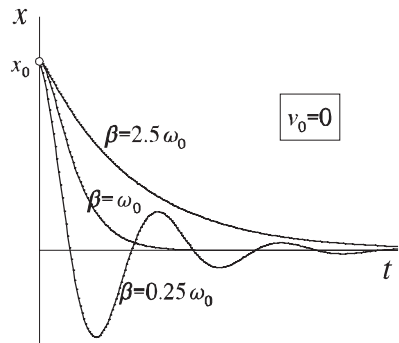


Figura 14.6

§14.7. Sobreamortiguamiento.- El sobreamortiguamiento se presenta cuando el parámetro de amortiguamiento β es mayor que la frecuencia angular natural ω_0 del oscilador (*i.e.*, $\zeta > 1$). Entonces, de acuerdo con la definición [14.15] de la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, ω' será imaginaria. En estas condiciones es evidente que no habrán oscilaciones, y la partícula regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o rebasándola una vez a lo sumo. Para unas condiciones iniciales dadas (x_0, v_0) , cuanto mayor sea el amortiguamiento más tiempo empleará el sistema en quedar en reposo en la posición de equilibrio.

Como en el caso anterior (crítico), es obvio que la ecuación diferencial [14.11] del movimiento deberá tener una solución para el caso en que $\beta > \omega_0$ distinta de la [14.14] y de la [14.36]. Para el oscilador sobreamortiguado, la solución de la ec. dif. [14.11] es de la forma

$$x = A_1 e^{-\Omega_1 t} + A_2 e^{-\Omega_2 t} \quad [14.38]$$

$$\text{con} \quad \Omega_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \Omega_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad [14.39]$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes de integración cuyos valores (*vide* Problema 14.2) dependerán de las condiciones iniciales (x_0, v_0) . Puesto que Ω_1 y Ω_2 son siempre positivas, la ecuación [14.38] consta de dos términos que decrecen exponencialmente con el tiempo, el primero más rápidamente que el segundo, de modo que la partícula se aproxima asintóticamente hacia la posición de equilibrio, disipando en el camino

toda la energía de que disponía inicialmente. Obsérvese que ni Ω_1 ni Ω_2 representan ahora una "frecuencia angular", ya que el movimiento es claramente aperiódico.

En la Figura 14.6 hemos representado gráficamente las curvas de elongación-tiempo correspondientes a un oscilador infraamortiguado, un oscilador con amortiguamiento crítico y un oscilador sobreamortiguado, para las mismas condiciones iniciales $x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$.

Debemos hacer una última aclaración. Es evidente que una fuerza de rozamiento del tipo $-\gamma v$, tal como hemos supuesto en nuestro estudio de las oscilaciones amortiguadas, no puede representar *exactamente* las situaciones reales, en las que el oscilador queda en reposo al cabo de un tiempo finito; con una fuerza de rozamiento del tipo $-\gamma v$ el reposo sólo se alcanzaría al cabo de un tiempo infinitamente grande.

§14.8. Oscilaciones forzadas.- En los osciladores reales, sean estos una masa sujeta a un muelle, un péndulo, un circuito eléctrico oscilante, ... existe siempre una disipación de energía, de modo que las oscilaciones de esos sistemas se amortiguan, disminuyendo la amplitud en el transcurso del tiempo hasta que finalmente desaparecen. Si deseamos mantener las oscilaciones de esos sistemas, deberemos compensar el amortiguamiento disponiendo de un mecanismo que suministre energía al sistema al mismo ritmo que éste la está disipando, o sea, cediéndola al medio resistivo. En nuestro análisis actual de los sistemas oscilantes nos limitaremos a las oscilaciones mecánicas.

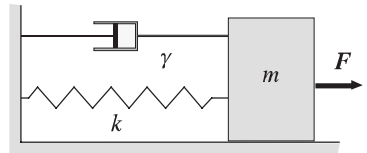


Figura 14.7

Para suministrar energía al sistema oscilante, desde el exterior, será necesario aplicarle una fuerza que realice trabajo sobre el sistema (Figura 14.7). Esta fuerza será función del tiempo, esto es, $F(t)$, de modo que la ecuación diferencial del movimiento del oscilador forzado será

$$F(t) - kx - \gamma \dot{x} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F(t) \quad [14.40]$$

o bien, con una notación más conveniente

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha(t) \quad [14.41]$$

con

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \alpha(t) = \frac{F(t)}{m} \quad [14.42]$$

donde β es el parámetro de amortiguamiento y ω_0 es la frecuencia angular natural del sistema oscilante, esto es, la frecuencia angular de sus oscilaciones libres no amortiguadas, ni forzadas. La función $\alpha(t)$, *i.e.*, la fuerza impulsora específica, suele denominarse *función de excitación*.

El caso más sencillo e interesante de oscilaciones forzadas se presenta cuando la fuerza impulsora varía armónicamente con el tiempo, esto es, cuando se trata de una fuerza periódica, de frecuencia angular ω , expresable en la forma

$$F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad [14.43]$$

donde F_0 y ω son, respectivamente, la *amplitud* y la *frecuencia angular de la fuerza impulsora*. En estas condiciones, resulta conveniente definir

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{m} \quad [14.44]$$

de modo que la ec. dif. del movimiento [14.41] pueda escribirse como

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \text{ sen } \omega t \quad [14.45]$$

que es una ec. dif. lineal de segundo orden, no homogénea (esto es con segundo miembro independiente de x), de coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación diferencial consta de dos partes: la *función complementaria* $x_c(t)$, que es la solución de la ecuación diferencial homogénea (esto es, con el segundo miembro igualado a cero), más una *solución particular* $x_p(t)$, que satisfaga a la ecuación diferencial no homogénea.

Es evidente que la *función complementaria* es la misma que la de la ec. dif. [14.11], ya considerada en los artículos anteriores. Limitando nuestro estudio a las oscilaciones forzadas débilmente amortiguadas; esto es, para $\beta < \omega_0$, tenemos

$$x_c(t) = A_0 e^{-\beta t} \text{ sen}(\omega' t + \psi) \quad [14.46]$$

donde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas en ausencia de fuerza impulsora alguna³.

Ensayemos una *solución particular*, de la ec. dif. [14.45] de la forma

$$x_p(t) = A \text{ sen}(\omega t - \delta) \quad [14.47]$$

Derivamos dos veces sucesivas, con respecto al tiempo, la expresión anterior,

$$\dot{x}_p = \omega A \cos(\omega t - \delta) \quad \ddot{x}_p = -\omega^2 A \text{ sen}(\omega t - \delta) \quad [14.48]$$

sustituimos estas expresiones en la ec. dif. [14.45],

$$-\omega^2 A \text{ sen}(\omega t - \delta) + 2\beta \omega A \cos(\omega t - \delta) + \omega_0^2 A \text{ sen}(\omega t - \delta) = \alpha_0 \text{ sen } \omega t$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} \text{sen}(\omega t - \delta) = \text{sen}\omega t \cos\delta - \cos\omega t \text{ sen}\delta \\ \cos(\omega t - \delta) = \cos\omega t \cos\delta + \text{sen}\omega t \text{ sen}\delta \end{cases} \quad [14.50]$$

después de algunas operaciones y de reagrupar términos, se obtiene

³ Obsérvese que debemos distinguir claramente entre la frecuencia angular de las oscilaciones libres (ω_0), la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas (ω') y la frecuencia angular de la fuerza impulsora (ω).

$$\begin{aligned} & \{ \alpha_0 - A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta \omega \sin \delta] \} \sin \omega t + \\ & + \{ A [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\beta \omega \cos \delta] \} \cos \omega t = 0 \end{aligned} \quad [14.51]$$

Puesto que las funciones $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$ no se anulan simultáneamente para ningún valor de t , esta última ecuación sólo se satisface en general si los coeficientes de cada término son idénticamente nulos. Esto es, debe anularse el coeficiente de $\cos \omega t$, de modo que

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad [14.52]$$

de donde

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{2\beta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \\ \cos \delta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \end{aligned} \right. \quad [14.53]$$

expresiones que nos permiten calcular el *ángulo de desfase* δ entre la fuerza impulsora y la elongación.

También deberá anularse el coeficiente de $\sin \omega t$, de modo que resulta

$$A = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta \omega \sin \delta} \quad [14.54]$$

Expresión en la que sustituiremos las relaciones [14.53] para obtener la *amplitud* A en función de las frecuencias angulares ω y ω_0 ; *i.e.*,

$$A = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad [14.55]$$

Obsérvese que tanto A como δ no son ahora constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales, sino cantidades fijas que dependen de las características del sistema amortiguado (ω_0, β) y de la fuerza impulsora (ω, α_0) . Matemáticamente, esto significa que hemos obtenido una solución particular de la ec. dif. [14.45]; escribiremos esta solución en la forma

$$x_p(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \operatorname{sen} \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad [14.56]$$

La solución completa de la ec. dif. [14.45] es

$$x = x_c(t) + x_p(t) = A_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega' t + \psi) + A \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \quad [14.57]$$

El primer término de esta solución completa se amortigua exponencialmente con el tiempo, de modo que una vez transcurrido un tiempo suficientemente largo en comparación con el tiempo de relajación, esto es, para $t \gg \tau_A = 1/\beta$, no contribuye de modo apreciable a la solución completa, puesto que prácticamente habrá desaparecido. Por esa razón recibe el nombre de *solución o efecto transitorio*. El segundo término de [14.57] representa la *solución o estado estacionario*, porque, al no estar amortiguado, será el que prevalezca una vez transcurrido un tiempo grande en comparación con el tiempo de relajación. Esto es

$$x(t \gg \tau_A) = A \text{sen}(\omega t - \delta) \quad [14.58]$$

donde la amplitud A y el ángulo de desfase δ viene dados por las expresiones [14.55] y [14.52], respectivamente, con independencia de las condiciones iniciales, que obviamente no interesarán cuando únicamente se considera el estado estacionario. Aunque en determinados problemas los efectos transitorios son importantes, el estado estacionario suele ser el que nos interesará en gran parte de las aplicaciones y problemas.

Los detalles del movimiento durante el tiempo en que persiste el efecto transitorio ($t \gg \tau_A$) dependen fuertemente del estado en que se encontraba el oscilador en el instante inicial ($t=0$) en que se aplicó la fuerza impulsora, así como de los valores relativos entre la frecuencia de amortiguamiento (ω') y la frecuencia de la fuerza impulsora (ω).

En la Figura 14.8 se muestra el efecto transitorio en el movimiento de un oscilador cuando $\omega < \omega'$; en estas condiciones, la respuesta del oscilador está notablemente *distorsionada* durante los primeros ciclos tras la aplicación de la fuerza impulsora. En la Figura 14.9 se muestra el efecto transitorio cuando $\omega > \omega'$; en este caso, la respuesta de mayor frecuencia (correspondiente al estado estacionario) está *modulada* y ligeramente *distorsionada* por la frecuencia de amortiguamiento durante los primeros ciclos del movimiento.

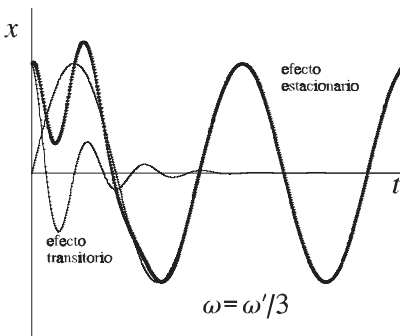


Figura 14.8

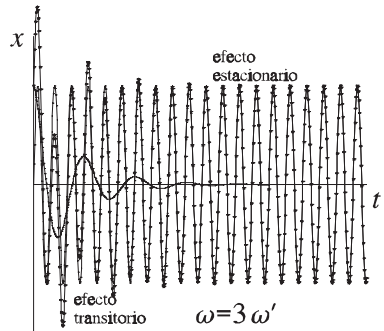


Figura 14.9

Cuando a un oscilador se le impone una fuerza impulsora con una frecuencia ω , diferente de su frecuencia natural ω_0 , la frecuencia de las oscilaciones en el estado estacionario (una vez que han desaparecido los efectos transitorios) será precisamente la frecuencia impuesta ω . Esta es una característica importante del oscilador:

La respuesta en el estado estacionario de un oscilador forzado (con o sin amortiguamiento) se presenta con la frecuencia de la fuerza impulsora, y no

con la frecuencia natural del oscilador.

Ninguna otra frecuencia, sino ω , satisface la ec. dif. del oscilador forzado [14.45]. Si la fuerza impulsora se elimina bruscamente, entonces el oscilador volverá a tener oscilaciones amortiguadas cuya frecuencia será $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ($\approx \omega_0$, cuando el amortiguamiento sea muy débil).

El ángulo δ que aparece en la solución correspondiente al estado estacionario [14.58] representa el *ángulo de desfase* entre la elongación y la fuerza impulsora. Así pues, δ tiene un significado muy diferente del que tiene ψ en la solución correspondiente al estado transitorio [14.46], en la que ψ está relacionada con las condiciones iniciales (x_0, v_0) . El estado transitorio depende de las condiciones iniciales; el estado estacionario es independiente de tales condiciones.

Es importante que se comprenda bien lo que representa el desfase angular δ entre la elongación y la fuerza impulsora. Tanto una como otra varían en el transcurso del tiempo según una ley sinusoidal.

El ángulo δ es el ángulo de fase con el que los máximos de la fuerza impulsora adelantan a los máximos de la elongación.

El valor del ángulo δ siempre está comprendido entre 0 y π radianes, de modo que la fuerza impulsora siempre estará adelantada con respecto a la elongación; salvo que $\delta=0$ o $\delta=\pi$, pues entonces la fuerza impulsora y la elongación estarán *en fase* o *en contrafase*, respectivamente.

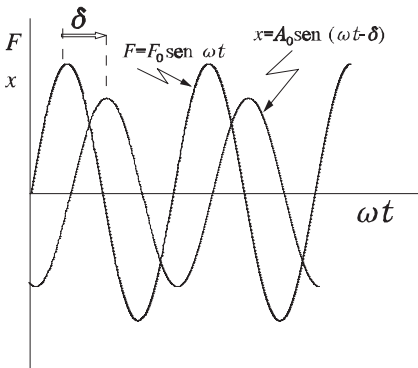


Figura 14.10

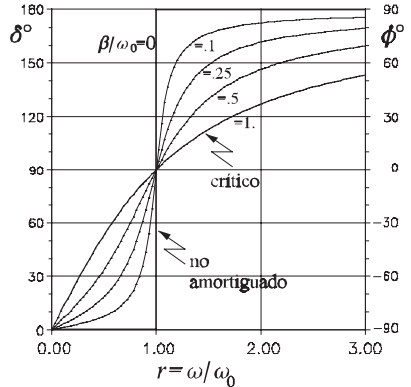


Figura 14.11

Para un sistema oscilante dado, esto es, para unos valores dados de ω_0 y β (o de m , k y γ), el desfase angular δ entre la elongación y la fuerza impulsora aumenta con la frecuencia de dicha fuerza impulsora (ω), como se puede comprobar fácilmente a partir de la expresión [14.52], que escribiremos en la forma

$$\text{tg } \delta = \frac{2 \zeta r}{1 - r^2} \quad \text{con } r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad [14.59]$$

En la Figura 14.11 presentamos las curvas de desfase angular-frecuencia impulsora para varios valores del amortiguamiento. Cuando el amortiguamiento sea muy débil,

entonces la elongación estará aproximadamente en fase con la fuerza impulsora ($\delta \approx 0$) para frecuencias de ésta inferiores a la frecuencia natural al sistema (ω_0); para frecuencias impulsoras $\omega > \omega_0$, el desfase angular será de casi 180° . Para amortiguamientos menos débiles, el paso de un desfase $\delta \approx 0$ al desfase $\delta \approx 180^\circ$ es más gradual. Obsérvese que, cualquiera que sea el valor del amortiguamiento (con $\beta \neq 0$) el desfase entre la elongación y la fuerza impulsora será $\delta = \pi/2$ ($=90^\circ$) cuando la frecuencia impulsora sea igual a la frecuencia natural del oscilador ($\omega = \omega_0$).

§14.9. Absorción de potencia. Resonancia.- La velocidad de la partícula oscilante, en el estado estacionario, se puede obtener derivando la expresión [14.58] correspondiente a la elongación

$$v \doteq \dot{x} = \omega A \cos(\omega t - \delta) = \omega A \sin(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}) = \omega A \sin(\omega t - \phi) \quad [14.60]$$

donde hemos preferido introducir el *desfase angular* ϕ entre la velocidad y la fuerza impulsora, que está relacionado con el desfase angular δ por

$$\phi = \delta - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \sin \delta \quad [14.61]$$

Cuando $\phi > 0$, la fuerza impulsora está adelantada respecto a la velocidad. Cuando $\phi = 0$, la fuerza impulsora y la velocidad están en fase. Cuando $\phi < 0$, la fuerza impulsora está retrasada respecto a la velocidad. Evidentemente, la velocidad siempre está adelantada $\pi/2 = 90^\circ$ respecto a la elongación. Obsérvese que la velocidad está en fase con la fuerza impulsora ($\phi = 0$) cuando la elongación y la fuerza impulsora están en *cuadratura* ($\delta = \pi/2$), como se ilustra en la Figura 14.11.

En el estado estacionario, la potencia transferida al oscilador por la fuerza impulsora viene dada por

$$\begin{aligned} P &= Fv = (F_0 \sin \omega t) \omega A \sin(\omega t - \phi) = \\ &= \omega A F_0 (\sin^2 \omega t \cos \phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \phi) \end{aligned} \quad [14.62]$$

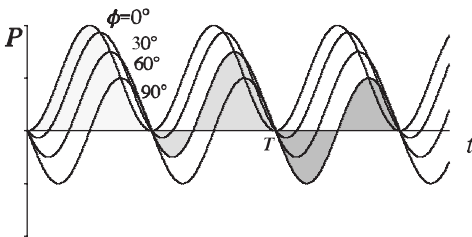


Figura 14.12

de modo que varía con el tiempo en el transcurso de un ciclo. En la Figura 14.12 hemos representado gráficamente la función $P(t)$; obsérvese que es periódica y que su frecuencia angular es 2ω .

Estamos interesados, una vez más, en la potencia media transferida al oscilador durante un ciclo de oscilación, ya que este dato será el que nos permitirá calcular la energía total transferida durante

un cierto intervalo de tiempo t ($t \gg 2\pi/\omega$). Calcularemos dicho valor medio a partir de la expresión [14.62]; teniendo en cuenta las expresiones [14.26] llegaremos a

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \omega A F_0 \cos \phi \quad [14.63]$$

El factor $(\cos \phi)$ recibe el nombre de *factor de potencia*.

De entre las expresiones [14.53a] y [14.55], teniendo en cuenta [14.61b], se deduce fácilmente que

$$A = \frac{\alpha_0}{2\beta\omega} \sin \delta = \frac{F_0}{2m\beta\omega} \sin \delta = \frac{F_0}{2m\beta\omega} \cos \phi \quad [14.64]$$

expresión que podemos utilizar para eliminar A en [14.63]. Así, tenemos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{2m\beta} \cos^2 \phi \quad [14.65]$$

donde podemos ver que la transferencia de potencia al oscilador es máxima cuando $\cos \phi = 1$, esto es, cuando $\phi = 0$, de modo que entonces la velocidad estará en fase con la fuerza impulsora. Decimos entonces que hay *resonancia en la transferencia de potencia* al oscilador. Puesto que cuando $\phi = 0$, es $\delta = \pi/2$, y hemos visto que esto tan sólo ocurre cuando $\omega = \omega_0$ (para cualquier valor del amortiguamiento, $\beta \neq 0$), podemos decir que

La máxima transferencia de potencia, es decir, la resonancia, se presenta cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincide con la frecuencia natural del oscilador.

Entonces, la velocidad y la fuerza impulsora están en fase, de modo que la partícula siempre se mueve en la misma dirección de la fuerza; ésta es, evidentemente, la condición más favorable para transferir potencia al oscilador.

Podemos poner de manifiesto la dependencia de $\langle P \rangle$ con la frecuencia de la fuerza impulsora (ω) sin más que sustituir en [14.63] las expresiones de A y de $\cos \phi$ ($= \sin \delta$) dadas por [14.55] y [14.53a], respectivamente; así tendremos.

$$\langle P \rangle = m\beta A^2 \omega^2 = \frac{m\beta \alpha_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \quad [14.66]$$

En la Figura 14.13 se representan gráficamente las curvas de potencia media transferida al oscilador por la fuerza impulsora en función de la frecuencia de ésta para varios valores del amortiguamiento. Estas curvas reciben el nombre de *curvas de resonancia*. Obsérvese que la potencia media transferida alcanza su valor máximo (para un amortiguamiento dado) cuando $\omega = \omega_0$ y que cuanto menor es el amortiguamiento mayor será el valor de $\langle P \rangle$ en la resonancia y más estrecha la curva de resonancia, esto es, más *aguda* será la resonancia. Conforme $\beta \rightarrow 0$, aumentan la altura de la resonancia y su *agudeza*.

La amplitud A de las oscilaciones forzadas, en el estado estacionario, es función de la frecuencia de la fuerza impulsora. En la Figura 14.14 representamos gráficamente la función $A(\omega)$ para varios valores del parámetro de amortiguamiento β . Para cada valor de β , podemos determinar el valor de la frecuencia impulsora para el cuál la

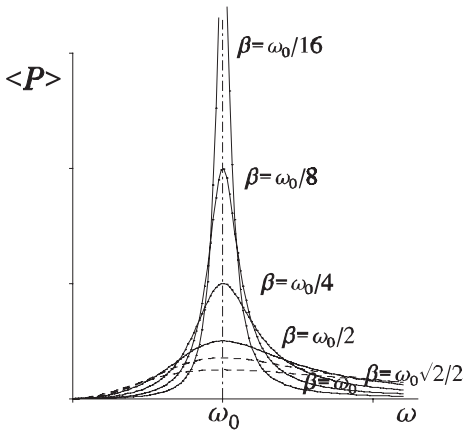


Figura 14.13

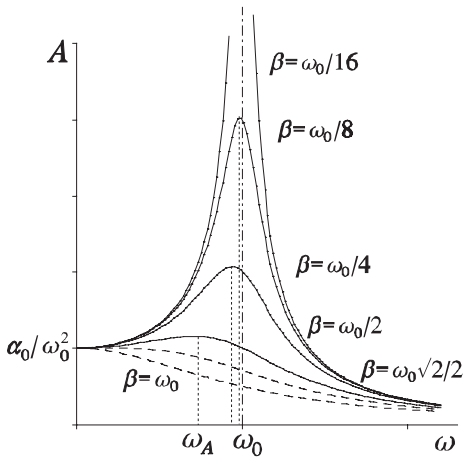


Figura 14.14

nitia, y esto ocurre cuando $\omega = \omega_0$, esto es, cuando la frecuencia impuesta coincide con la frecuencia natural del oscilador. Por supuesto que no habrá resonancia en la amplitud cuando $2\beta^2 > \omega_0^2$ (i.e., $0.707 \leq \zeta < 1$, amortiguamiento no suficientemente débil), ya que entonces ω_A sería imaginaria y la función $A(\omega)$ no presenta ningún máximo relativo (entonces, la amplitud decrece continuamente al aumentar ω).

La velocidad del oscilador forzado, en el estado estacionario, viene dada por [14.60]; por consiguiente, la "amplitud" de la velocidad, o sea, la velocidad máxima en cada ciclo, es

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \frac{\alpha_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad [14.70]$$

amplitud alcanza su valor máximo. Sea ω_A dicho valor. Para determinarlo, derivamos la expresión [14.55] e igualamos a cero el resultado:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_A} = 0 \quad [14.67]$$

para obtener finalmente

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad [14.68]$$

A esta frecuencia ω_A se le llama *frecuencia de resonancia en la amplitud*. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a ω_A se presenta la resonancia en la amplitud de las oscilaciones; esto es, la amplitud de las mismas en el estado estacionario alcanza su valor máximo dado por

$$A_{\text{res}} = \frac{\alpha_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad [14.69]$$

Cuanto menor es el amortiguamiento, más pronunciada es la resonancia y más se aproxima el valor de la frecuencia de resonancia en la amplitud (ω_A) al de la frecuencia natural del sistema oscilante (ω_0). Cuando $\beta = 0$, la amplitud en la resonancia es infi-

de modo que la amplitud de la velocidad depende de la frecuencia impuesta (ω) como se indica en la Figura 14.15, en la que hemos representado gráficamente la función $v_{\text{máx}}(\omega)$ para varios valores de β . Obsérvese que $v_{\text{máx}}$ presenta su valor máximo, para cualquier valor de β , cuando $\omega = \omega_0$, *i.e.*, cuando se anula el paréntesis en el denominador de la expresión [14.70]. A esa frecuencia la velocidad y la energía cinética de la masa oscilante son máximas, y se dice que hay *resonancia en la energía cinética*. Así pues, en tanto que la resonancia en la amplitud se presenta para una frecuencia $\omega_A < \omega_0$, la resonancia en la energía cinética se presenta para una frecuencia $\omega_E = \omega_0$. Cuando el amortiguamiento sea muy débil, no existirá diferencia apreciable entre ambas frecuencias de resonancia; *i.e.*, para $\beta \rightarrow 0$, es $\omega_A \approx \omega_E$.

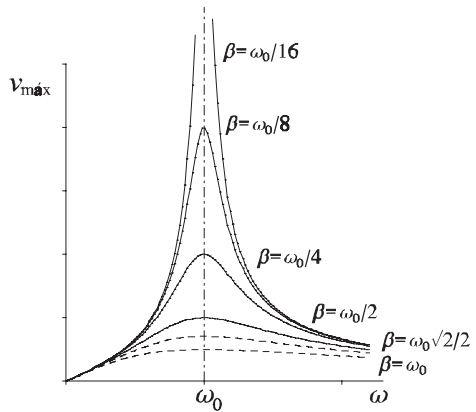


Figura 14.15

La frecuencia de resonancia en la energía cinética coincide con la frecuencia de resonancia en la transferencia de potencia al oscilador por la fuerza impulsora. Puesto que la energía potencial es proporcional al cuadrado de la amplitud, la resonancia en la energía potencial ocurrirá en ω_A . El que no coincidan estas dos frecuencias de resonancia ($\omega_A < \omega_E$) es característico del oscilador forzado con amortiguamiento y es consecuencia de que dicho sistema no sea conservativo, por haber un intercambio continuo de energía entre el oscilador, el medio resistivo y el mecanismo impulsor.

El fenómeno de resonancia es muy frecuente en la física; se encuentra prácticamente en todas sus ramas.

Un ejemplo corriente de resonancia lo encontramos al empujar un columpio. El columpio es un sistema (un péndulo) con una sola frecuencia natural que depende de la longitud de las cuerdas. Si damos al columpio una serie de impulsos regularmente espaciados, con frecuencia igual (o múltiplo) a la suya natural, la amplitud de las oscilaciones puede hacerse muy grande.

Un puente, y para el caso cualquier estructura, es capaz de vibrar con ciertas frecuencias naturales. Si el paso regular de una columna de soldados tuviera una frecuencia igual a alguna de las frecuencias naturales del puente, podrían producirse unas oscilaciones de amplitud peligrosamente grande (este fue el caso del célebre puente de Angers, que resultó destruido por la resonancia que produjo el paso de una columna de soldados en formación). Por ello, al pasar un puente, se ordena romper la formación.

El fenómeno de resonancia puede demostrarse, en forma muy simple y convincente, colocando dos diapasones idénticos próximos el uno del otro y golpeando uno de ellos. Se escucharán las vibraciones del otro diapason cuando suprimamos repentinamente las del diapason que habíamos golpeado. Si ajustamos una pequeña mordaza a uno cualquiera de ellos, la frecuencia natural de vibración del mismo se alterará lo suficiente como para eliminar la resonancia.

Un ejemplo de resonancia electromagnética lo constituye el proceso de sintonización de un aparato de radio. Todas las emisoras están produciendo oscilaciones forzadas en el circuito del receptor. A cada posición del sintonizador corresponde una frecuencia natural de oscilación (electromagnética) del circuito eléctrico del receptor. Cuando esa frecuencia coincide con la de la emisora

que deseamos sintonizar, la potencia absorbida alcanza un valor máximo y esa será la única emisora que oiremos.

El concepto de resonancia se extiende a muchos procesos en los que hay unas condiciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro, incluso cuando no podamos describir el proceso en función de oscilaciones forzadas. Así, en ese sentido, es posible hablar de resonancias en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas elementales.

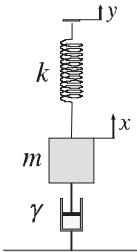


Figura 14.16

Ejemplo I.- Oscilación forzada.- Cuando colgamos un objeto 200 g de un muelle suspendido verticalmente, se observa que la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas de éste es de 2 Hz, con un tiempo de relajación para la amplitud de 10 s. Hacemos oscilar hacia arriba y abajo el extremo superior del muelle, con un movimiento armónico simple, con una amplitud de 1 mm.

a) Determinar el valor de la constante elástica k del muelle y de la constante de amortiguamiento γ del sistema. **b)** ¿Cuál deberá ser la frecuencia de las oscilaciones de dicho extremo superior para que sea máxima la amplitud de las oscilaciones del objeto? ¿Cuánto valdrá dicha amplitud máxima? **c)** Calcular el factor de calidad del sistema oscilante. **d)** ¿Qué potencia está suministrando la fuerza impulsora? ¿Qué potencia se disipa en el amortiguamiento? ¿Qué energía queda almacenada en el sistema?

El esquema del sistema oscilante es el que se muestra en la figura. Comenzaremos determinando el parámetro de amortiguamiento β y la frecuencia natural ω_0 del sistema oscilante:

$$v' = 2 \text{ Hz} \quad \omega' = 2\pi v' = 4\pi = 12.57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \beta = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{\tau_A} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \beta^2} = 12.57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \zeta = \frac{\beta}{\omega_0} = 0.008$$

de modo que el amortiguamiento es *muy débil* ($\zeta \ll 1$).

a) Escribamos ahora la ec. dif. del movimiento de m ; esto es,

$$-k(x-y) - \gamma\dot{x} = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = ky \rightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y$$

en la que hemos omitido el peso ($mg=\text{cte.}$) ya que la existencia de éste tan sólo determina la posición de equilibrio en torno a la cual tienen lugar las oscilaciones, sin intervenir en las características esenciales del movimiento. De la ec. dif. anterior⁴ se sigue

$$2\beta = \frac{\gamma}{m} \rightarrow \gamma = 2m\beta = 2 \cdot 0.200 \cdot 0.1 = 0.04 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

⁴ La ec. dif. del movimiento nos sugiere la posibilidad de considerar una *fuerza impulsora equivalente*, dada por $F_{\text{eq}}=ky$, aunque sólo sea para poder proceder a la integración de la ec. diferencial del movimiento siguiendo la pauta desarrollada en el epígrafe §14.8. Sin embargo, el lector comprobará fácilmente que, en el sistema representado en la Figura 14.17, la fuerza impulsora *real* que deberá actuar sobre el extremo superior del muelle para producir la oscilación $y = B \sin \omega t$ será $F = k(y - x)$, de modo que sólo podemos evaluarla una vez que tengamos la solución $x = A \sin(\omega t - \delta)$ de la ec. diferencial del movimiento.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad k = m\omega_0^2 = 0.200 \cdot 12.57^2 = 31.6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

y, además, puesto que la oscilación del extremo superior del muelle está descrita por $y = B \text{ sen } \omega t$, con $B=1 \text{ mm}$, la función de excitación del sistema oscilante queda definida por

$$\alpha(t) = \frac{k}{m} y = \omega_0^2 B \text{ sen } \omega t = \alpha_0 \text{ sen } \omega t$$

de modo que $\alpha_0 = \omega_0^2 B$.

b) Para que sea máxima la amplitud de las oscilaciones de m , la frecuencia impuesta (ω) por la oscilación del extremo superior del muelle deberá ser igual a la frecuencia de resonancia en amplitud [14.68], que coincide prácticamente con la frecuencia natural ω_0 (amortiguamiento muy débil); *i.e.*,

$$\omega \approx \omega_0 = 12.57 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La amplitud de las oscilaciones en la resonancia [14.69] será

$$A_{\text{res}} = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\alpha_0}{2\beta\omega_0} = \frac{\omega_0 B}{2\beta} = \frac{12.57 \cdot 0.001}{2 \cdot 0.1} = 0.0628 \text{ m} = 62.8 \text{ mm}$$

c) El factor de calidad Q lo calculamos mediante la expresión [14.34]:

$$Q = \frac{\omega'}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{12.57}{2 \cdot 0.1} = 62.8$$

Obsérvese que $A_{\text{res}} \approx QB$.

d) La energía media almacenada en el oscilador será:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k A_{\text{res}}^2 = \frac{1}{2} 31.6 \cdot 0.0628^2 = 0.0623 \text{ J}$$

La potencia suministrada al sistema, en el estado estacionario, es igual a la potencia disipada en el amortiguamiento. Podemos calcularla a partir de la definición del factor de calidad [14.33]:

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T_0} = \omega_0 \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle} \quad \rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{\omega_0}{Q} \langle E \rangle = \frac{12.57}{62.8} 0.0623 = 0.01248 \text{ W} = 12.48 \text{ mW}$$

Ejemplo II.- Rotación desequilibrada. Una máquina que posee una parte rotatoria (v.g., un motor eléctrico) puede esquematizarse como se muestra en la figura, siendo M la masa total de la máquina y m una masa equivalente excéntrica (incluida en la masa total M) situada a una distancia e del eje de rotación, de modo que, cuando la máquina está en marcha, se producen vibraciones de la misma frecuencia que la de rotación del rotor. **a)** Encontrar la expresión de la amplitud de las vibraciones verticales de la máquina en función de su velocidad de rotación (ω) y de las características (k, γ) del sistema de amortiguamiento. **b)** Determinar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. **c)** Determinar la fuerza que se transmite al suelo.

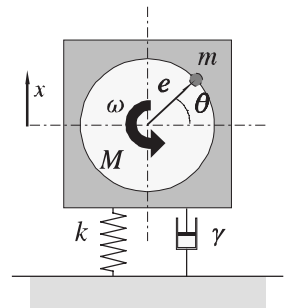


Figura 14.17

a) La fuerza "asociada" a la masa excéntrica m es $em\omega^2$ (fuerza centrífuga), cuya componente vertical es $em\omega^2 \sin\omega t$, lo que representa una *fuerza impulsora equivalente*

$$F(t) = m\omega^2 e \sin\omega t = F_0 \sin\omega t \quad \text{con } F_0 = em\omega^2$$

donde el producto em suele recibir el nombre de *desbalanceamiento*. Obsérvese que F_0 es función de ω . Así pues, la ec. dif. del movimiento se escribe en la forma

$$F(t) - kx - \gamma\dot{x} = M\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\gamma}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{F_0}{M} \sin\omega t$$

de modo que, por analogía con la ec. dif. [14.41], será

$$\beta = \frac{\gamma}{2M} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \alpha_0 = \frac{em}{M} \omega^2$$

La elongación de las vibraciones verticales de la máquina vendrá dada por la función $x = A \sin(\omega t - \delta)$ con A y δ dadas por [14.55] y [14.52], respectivamente; esto es,

$$A = \frac{em\omega^2}{M \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \delta = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad [i]$$

o bien

$$A = \frac{em\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad [ii]$$

b) Para determinar la amplitud de las vibraciones verticales correspondiente a la resonancia (amplitud máxima), determinaremos el valor máximo de $A(\omega)$; esto es,

$$\left. \frac{dA}{d\omega} \right|_{\omega_A} = 0 \quad A_{\text{res}} = A(\omega_A)$$

Después de algunas operaciones, obtendremos la frecuencia de resonancia y la amplitud de resonancia:

$$\omega_A = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad A_{\text{res}} = \frac{em}{M} \frac{\omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad [iii]$$

expresiones que, obviamente, son diferentes de [14.68] y [14.69], respectivamente. Obsérvese que si el amortiguamiento fuese *muy débil* ($\beta \ll \omega_0$) sería

$$\omega_A = \omega_0 \quad A_{\text{res}} = \frac{em\omega_0}{2M\beta} \quad [iv]$$

pudiendo llegar a ser peligrosamente grande la amplitud de las vibraciones. En consecuencia, en el diseño del amortiguamiento, deberá evitarse que la frecuencia angular natural (ω_0) asociada a éste tenga un valor cercano al de la velocidad angular (ω) de trabajo de la máquina.

c) La fuerza transmitida al suelo es la suma de las generadas por el muelle y el amortiguador:

$$F_t = kx + \gamma\dot{x} \quad [v]$$

con

$$x = A \sin(\omega t - \delta) \quad \dot{x} = \omega A \cos(\omega t - \delta)$$

de modo que

$$F_t = kA \text{ sen}(\omega t - \delta) + \gamma \omega A \text{ cos}(\omega t - \delta) = A \sqrt{k^2 + \gamma^2 \omega^2} \text{ sen}(\omega t + \varphi) \quad [\text{vi}]$$

El cociente entre las amplitudes de la fuerza transmitida y de la fuerza impulsora, que recibe el nombre de *transmisibilidad*, será

$$\text{TR} = \frac{F_t}{F_0} = \frac{A \sqrt{k^2 + \gamma^2 \omega^2}}{em\omega^2} = \frac{\sqrt{k^2 + \gamma^2 \omega^2}}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad [\text{vii}]$$

que también podemos expresar en la forma

$$\text{TR} = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\beta^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 r^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}} \quad [\text{viii}]$$

con
$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0} \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ejemplo III.- Instrumentación sísmica.- En lo esencial, un instrumento sísmico es un sistema oscilante consistente en una *base* o soporte, firmemente anclada en el terreno, a la que está unida una masa *m* mediante un muelle-amortiguador, como se ilustra en la Figura 14.18. El movimiento relativo entre la masa y la base se puede registrar gráficamente mediante un tambor giratorio u otro dispositivo apropiado. Supongamos que la oscilación de la base quede descrita por $y=B\text{sen}\omega t$.
a) Obtener la expresión de la respuesta $x(t)$ registrada por el aparato. **b)** Discutir la relación "salida"/"entrada" en función del valor de la frecuencia ω de la perturbación sísmica.

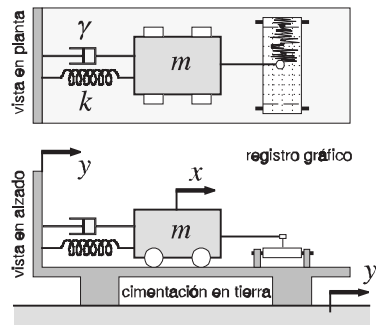


Figura 14.18

Designamos por x la elongación de la masa m con respecto a la base y escribimos la ec. dif. del movimiento de la masa m en el referencial ligado a la base (no-inercial):

$$-kx - \gamma \dot{x} - m\ddot{y} = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = -\ddot{y}$$

que, teniendo en cuenta la expresión $y(t)$ que nos describe la oscilación de la base, *i.e.*,

$$y = B \text{ sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \omega B \text{ cos} \omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\omega^2 B \text{ sen} \omega t$$

queda en la forma
$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 B \text{ sen} \omega t = \alpha_0 \text{ sen} \omega t$$

con
$$\beta = \frac{\gamma}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \alpha_0 = \omega^2 B$$

cuya solución estacionaria es $x = A \text{ sen } (\omega t - \delta)$

$$\text{con } A = \frac{\omega^2 B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \text{tg} \delta = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

b) El cociente entre las amplitudes de las oscilaciones *registrada* (salida) y la de la base (entrada) viene dada por la expresión

$$\frac{A}{B} = \frac{(\omega / \omega_0)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4(\beta/\omega_0)^2 (\omega/\omega_0)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}}$$

$$\text{con } r = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \zeta = \frac{\beta}{\omega_0}$$

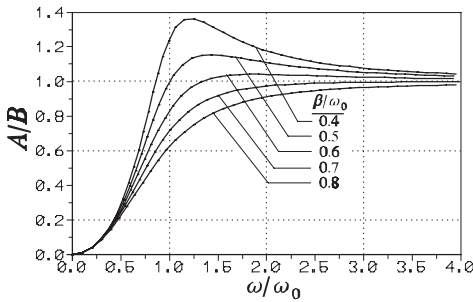


Figura 14.19

que hemos representado gráficamente en la Figura 14.19 en función de la razón ω/ω_0 , entre la frecuencia de entrada y la frecuencia natural del sistema no-amortiguado, para diferentes valores del factor de amortiguamiento ($\zeta = \beta/\omega_0$) del mismo.

En la práctica, la oscilación de entrada no suele corresponder a una única frecuencia, sino que suele consistir en una combinación de varias frecuencias e, incluso, presentar un *espectro continuo* de frecuencias. En estas condiciones, resulta deseable que la razón A/B entre las amplitudes de salida y de entrada sea aproximadamente

igual a la unidad en el intervalo de frecuencias de entrada; entonces, se dice que instrumento presenta una *respuesta plana*. En la Figura 14.19 podemos observar que la respuesta es aproximadamente plana para frecuencias ω mayores que aproximadamente $2\omega_0$ si el amortiguamiento del sistema se escoge de modo que β/ω_0 quede en el intervalo de 0.6 a 0.7. Además, debemos resaltar que cuanto menor sea la frecuencia natural (ω_0) del sistema, mayor será el intervalo de frecuencias de entrada (ω) en el que el instrumento presenta una respuesta plana. Por esta razón, los sismógrafos suelen diseñarse con grandes masas y resortes relativamente débiles.

§14.10. Impedancia de un oscilador.- Un oscilador amortiguado queda caracterizado por su *masa* m , su *constante elástica* k y su *constante de amortiguamiento* γ . En las expresiones que hemos encontrado en los artículos anteriores, hemos preferido caracterizar al oscilador por su frecuencia natural ω_0 y su parámetro de amortiguamiento β , sin hacer referencia explícita a las cantidades m , k y γ . Recordemos que

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \beta = \frac{\gamma}{2m} \quad \alpha_0 = \frac{F_0}{m} \quad [14.71]$$

En lo que sigue, preferiremos caracterizar el oscilador por las cantidades (m, k, γ) . A partir de la expresión [14.70], en la que sustituiremos las expresiones [14.71], se obtiene

$$v_{\text{máx}} = \frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2 + (m\omega - k/\omega)^2}} \quad [14.72]$$

La cantidad que aparece en el denominador de [14.72] recibe el nombre de *impedancia* del oscilador, y se la designa por la letra Z . Esto es,

$$Z = \sqrt{\gamma^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} \quad [14.73]$$

y, si llamamos *resistencia* R a la constante de amortiguamiento γ y *reactancia* X al término $(m\omega - k/\omega)$, esto es

$$R \equiv \gamma \qquad X \equiv \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad [14.74]$$

podemos escribir

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad [14.75]$$

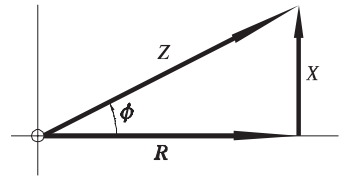


Figura 14.20

La relación entre Z , R y X puede representarse gráficamente como se indica en la Figura 14.20, donde el ángulo ϕ representa el desfase entre la velocidad y la fuerza impulsora. En efecto, puesto que $\text{tg } \delta = -\text{cotg } \phi = -1/\text{tg } \phi$, de

$$\text{tg } \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\gamma}{\frac{k}{\omega} - m\omega} \quad [14.76]$$

se sigue que

$$\text{tg } \phi = \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\gamma} = \frac{X}{R} \quad [14.77]$$

Con esta nueva notación podemos expresar la velocidad de la masa oscilante en cualquier instante por

$$v = \frac{F_0}{Z} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad [14.78]$$

y es posible utilizar la notación fasorial, tal como se indica en la Figura 14.21, para representar la fuerza aplicada y la velocidad de la masa oscilante mediante los correspondientes fasores o vectores rotantes \mathbf{F} y \mathbf{v} . Observemos que si $\phi > 0$, el fasor \mathbf{v}

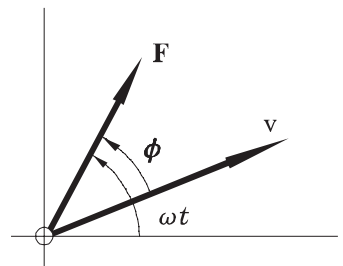


Figura 14.21

estará atrasado respecto al \mathbf{F} . En la resonancia será $\phi=0$ y ambos fasores tendrán la misma dirección y sentido. La notación fasorial simplifica considerablemente el estudio de las oscilaciones y, lo que es más importante, permite una formulación general que pone de manifiesto interesantes analogías.

La potencia transferida al oscilador por la fuerza impulsora es

$$\begin{aligned} P &= F v = \frac{F_0^2}{Z} \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = \\ &= \frac{F_0^2}{Z} (\operatorname{sen}^2\omega t \cos\phi - \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t \operatorname{sen}\phi) \end{aligned} \quad [14.79]$$

y la potencia media es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \cos\phi = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{Z} \frac{R}{Z} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 R}{Z^2} \quad [14.80]$$

En la resonancia, cuando $\phi=0$ y $\omega=\omega_0$, la absorción de potencia es máxima, y puesto que $X_{\text{res}}=0$ y $Z_{\text{res}}=R$, tenemos

$$\langle P \rangle_{\text{res}} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{R} \quad [14.81]$$

y la relación entre $\langle P \rangle$ y $\langle P \rangle_{\text{res}}$ vale

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{\text{res}}} = \frac{R^2}{Z^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2} \quad [14.82]$$

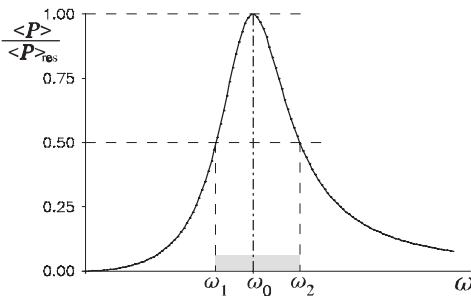


Figura 14.22

de modo que es función de la frecuencia impuesta. En la Figura 14.22 hemos representado el cociente $\langle P \rangle / \langle P \rangle_{\text{res}}$ en función de la frecuencia impulsora o impuesta ω (curva de absorción de potencia relativa).

Se define la *anchura de la resonancia* ($BW = \omega_2 - \omega_1$) como el intervalo de frecuencias en el que la potencia absorbida por el sistema oscilante es igual o mayor a la mitad de la correspondiente a la

resonancia. Para las frecuencias límites ω_1 y ω_2 tenemos

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{\text{res}}} = \frac{R^2}{Z^2} = \frac{1}{2} \quad [14.83]$$

o sea
$$2R^2 = Z^2 = R^2 + X^2 \quad \Rightarrow \quad R = \pm X \quad [14.84]$$

En $\omega_1 (<\omega_0)$ es $m\omega_1 < k/\omega_1$, de modo que tomaremos el signo negativo de [14.84] y obtendremos

$$\gamma = - \left(m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1} \right) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} - \beta \quad [14.85]$$

En $\omega_2 (>\omega_0)$ es $m\omega_2 > k/\omega_2$, de modo que tomaremos el signo positivo de [14.84] y obtendremos

$$\gamma = + \left(m\omega_2 - \frac{k}{\omega_2} \right) \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} + \beta \quad [14.86]$$

Multiplicando ω_1 y ω_2 dados por esas dos expresiones, se tiene

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \quad [14.87]$$

de modo que la frecuencia de resonancia es la media geométrica de las frecuencias que definen al ancho de banda (BW).

Restando las expresiones de ω_1 y ω_2 , se tiene

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta \quad [14.88]$$

de modo que el ancho de banda es proporcional al amortiguamiento.

Utilizando la expresión [14.34] para el factor de calidad en la resonancia, tenemos

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{BW} \quad [14.89]$$

esto es, el factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\text{frecuencia de resonancia}}{\text{anchura de la resonancia}} \quad [14.90]$$

mide la *agudeza de la resonancia*, o sea, la agudeza del ajuste o sintonía entre el sistema oscilante y la frecuencia impuesta para la máxima absorción de potencia. Obsérvese que la *calidad del ajuste* o factor de calidad Q tiende hacia cero cuando $\beta \rightarrow \infty$ (mucha disipación de potencia en el rozamiento) y que tiende hacia infinito cuando $\beta \rightarrow 0$ (no hay disipación de potencia y la respuesta es cada vez más fuerte), lo que significa que va aumentando la energía almacenada en el oscilador sin que se disipe nada de ella.

Problemas

14.1.- Demostrar que las constantes A_0 y ψ que aparecen en la expresión de la elongación del oscilador armónico amortiguado en función del tiempo [14.14] pueden expresarse en función de las condiciones iniciales x_0 y v_0 en la forma

$$A_0^2 = x_0^2 + \left(\frac{\beta x_0 + v_0}{\omega'} \right)^2$$

$$\psi = \arctg \left(\frac{\omega' x_0}{\beta x_0 + v_0} \right)$$

con $\omega'^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.

14.2.- a) Demostrar que las constantes A_1 y A_2 , que aparecen en la expresión [14.38] de la elongación del oscilador sobreamortiguado, vienen dadas en función de las condiciones iniciales x_0 y v_0 por

$$A_1 = - \frac{v_0 + \Omega_2 x_0}{\Omega_1 - \Omega_2} \quad A_2 = \frac{v_0 + \Omega_1 x_0}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

14.3.- Energía en las oscilaciones amortiguadas. **a)** Demostrar que la energía total del oscilador amortiguado varía en función del tiempo de acuerdo con la función

$$E = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t} \dots$$

$$[\omega'^2 + 2\beta^2 \text{sen}^2 \omega' t - \omega' \beta \text{sen} 2\omega' t]$$

y que la potencia disipada lo hace según

$$\frac{dE}{dt} = - 2m A_0^2 \beta e^{-2\beta t} [\omega' \cos \omega' t - \beta \text{sen} \omega' t]^2$$

b) A partir de las expresiones anteriores, calcular los valores medio, referidos a un ciclo de oscilación, de la energía del oscilador y de la disipación de energía.

14.4.- Demostrar que el decremento logarítmico efectivo para la energía de un oscilador amortiguado es el doble del correspondiente a la amplitud.

14.5.- Un oscilador armónico amortiguado, cuya frecuencia natural es $\omega_0 = 15 \text{ rad/s}$ y cuyo parámetro de amortiguamiento es $\beta = 9 \text{ s}^{-1}$, se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio. En el instante $t=0$ recibe un impulso que lo pone en movimiento con una velocidad inicial de 60 cm/s . **a)** Expresar la elongación del oscilador en función del tiempo. **b)** Calcular el máximo desplazamiento que experimenta el oscilador a partir de su posición de equilibrio. **c)** Calcular el tiempo que deberá transcurrir para que la amplitud de las oscilaciones amortiguadas se reduzca a un 0.1 % del valor máximo anteriormente calculado.

14.6.- Una masa de 0.5 kg , unida a un muelle de constante elástica $k=250 \text{ N/m}$, oscila con una amplitud inicial de 6 cm . **a)** Hallar el periodo y la energía del oscilador en el instante inicial. **b)** Determinar el valor de la constante de amortiguamiento del oscilador sabiendo que la energía se disipa a razón de 1% en cada ciclo.

14.7.- Un cuerpo de 2 kg de masa descansa sobre un tablero horizontal y está unido al extremo libre de un muelle de constante elástica $k=200 \text{ N/m}$. En un instante dado sus oscilaciones presentan una amplitud de 30 cm ; dicha amplitud se reduce a la mitad cuando han transcurrido 25 s . Con esos datos y suponiendo un amortiguamiento viscoso, determinar: **a)** el valor del parámetro de amortiguamiento y del tiempo de relajación, **b)** la frecuencia y el periodo de las oscilaciones no amortiguadas, **c)** ídem de las oscilaciones amortiguadas, **d)** el tiempo que debe transcurrir para que se disipe la mitad de la energía del oscilador, **e)** ídem el 99% de la energía del oscilador. ¿Cuál será entonces la amplitud de las oscilaciones?

14.8.- Un oscilador está caracterizado por los parámetros siguientes: $m=0.5 \text{ kg}$, $k=50 \text{ N/m}$ y $\beta=0.01 \text{ s}^{-1}$. En el instante inicial la amplitud de sus oscilaciones es de 0.25 m . **a)** Calcular el valor de la energía que se disipa por oscilación en el instante inicial. **b)** Calcular el número de oscilaciones que habrán de completarse antes de que la energía del oscilador se haya reducido a un 1% de su valor inicial. ¿Cuánto valdrá entonces la energía perdida por oscilación?

14.9.- Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia de oscilación que es tan sólo el 85% de su frecuencia natural (sin amortiguamiento). ¿En qué factor disminuye su amplitud en cada oscilación? ¿Ídem su energía?

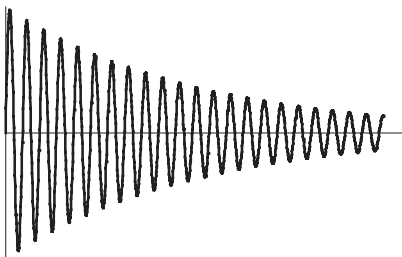
14.10.- Un péndulo simple está constituido por una esfera de plomo de 2 cm de diámetro suspendida del extremo de una cuerda inextensible y ligera de 1 m de longitud. Analizar el efecto que produce la viscosidad del aire en el movimiento del péndulo (esto es, determinar la influencia de la viscosidad sobre la amplitud y periodo de las oscilaciones). Datos: el coeficiente de viscosidad del aire, a 20°C, es 181 μP ; la densidad del plomo es 11.35 g/cm^3 .

14.11.- La frecuencia natural de un oscilador es 420 Hz, en tanto que su frecuencia amortiguada es 416 Hz. Calcular el factor de calidad Q y el decremento logarítmico del oscilador.

14.12.- Un oscilador tiene una masa de 40 g y presenta un periodo de 2 s. Se observa que la amplitud de sus oscilaciones disminuye en un 5% cuando se completan 10 oscilaciones. **a)** Calcular el valor de la constante de amortiguamiento, del decremento logarítmico y del Q del oscilador. **b)** ¿Qué fracción de energía se disipa en cada ciclo?

14.13.- Oscilador forzado estacionario.- Comprobar analíticamente que la potencia media transferida al oscilador por la fuerza impulsora es igual a la potencia media disipada en el amortiguamiento.

14.14.- El factor de calidad de un oscilador es $Q=1\ 000$ y la frecuencia de sus oscilaciones es 420 Hz. **a)** Calcular el valor del parámetro de amortiguamiento, del decremento logarítmico y del tiempo de relajación. **b)** ¿Cuántas oscilaciones se completan durante el tiempo de relajación?



Prob. 14.15

14.15.- Determinar el Q del oscilador amortiguado cuyo movimiento está representado gráficamente en la figura.

14.16.- Piano. Cuando se pulsa en el piano la tecla correspondiente al do_3 ($\nu=264$ Hz), la intensidad del sonido que escuchamos disminuye a la mitad de su valor inicial en aproximadamente 1 s. **a)** ¿Cuál es el Q correspondiente a esa nota? **b)** Supongamos que la nota correspondiente a una octava más alta, esto es, el do_4 ($\nu=528$ Hz), posea sensiblemente el mismo Q . ¿Qué tiempo deberá transcurrir para que la intensidad del sonido emitido se reduzca a la mitad de su valor inicial? **c)** De acuerdo con los resultados anteriores y suponiendo que el Q sea el mismo para todas las notas, ¿qué notas persistirán más tiempo, las agudas o las graves?

14.17.- La constante elástica de un oscilador es $k=90$ dyn/cm, su parámetro de amortiguamiento es $\beta=3$ s^{-1} y su masa es $m=10$ g. La masa se encuentra inicialmente en reposo en la posición de equilibrio; entonces, una fuerza impulsiva le comunica una velocidad de 60 cm/s. Calcular el desplazamiento máximo de la masa respecto a su posición de equilibrio.

14.18.- Consideremos de nuevo el oscilador del Problema 14.17. Supongamos que la masa oscilante se encuentre en el instante inicial a una distancia de 4 cm de su posición de equilibrio, y que se mueva con una velocidad de 60 cm/s en dirección hacia ella. ¿Rebasará la posición de equilibrio? Describese detalladamente el movimiento.

14.19.- Repetir el Problema 14.17 para el caso en que $\beta=5$ s^{-1} .

14.20.- Cuando una partícula cargada está en movimiento acelerado irradia energía electromagnética. De acuerdo con la teoría electromagnética clásica (no-relativista), la energía irradiada por unidad de tiempo y que atraviesa una esfera de radio r centrada en la partícula cargada en movimiento viene dada por la fórmula de LARMOR:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

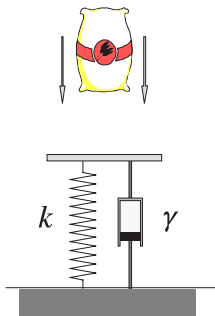
donde ϵ_0 es la permitividad del vacío ($\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}$ C/N \cdot m 2), c es la velocidad de la luz en el vacío ($c=2.9979 \times 10^8$ m/s) y q y a son, respectivamente, la carga (coulombs) y la aceleración (m/s 2) de la partícula cargada.

Consideremos una partícula cargada, de masa m y carga q , que oscile a lo largo de una recta, con una amplitud A y una frecuencia ν y supóngase que su movimiento quede descrito

por $x = A \sin 2\pi\nu t$ durante un ciclo cualquiera del movimiento. **a)** ¿Qué cantidad de energía se irradia por ciclo? **b)** ¿Cuál es el factor de calidad Q de este oscilador? **c)** ¿Cuál es el tiempo de relajación del oscilador? ¿Cuántas oscilaciones deberá realizar la partícula cargada antes de que su energía se reduzca a la mitad de su valor inicial?

APLICACIÓN NUMÉRICA: Considérese que la partícula oscilante sea un electrón ($e=1.602 \times 10^{-19}$ C, $m=9.106 \times 10^{-31}$ kg) que oscile con una frecuencia óptica típica (en el visible) de 6×10^{14} Hz.

14.21.- Un fardo que pesa 300 kg cae desde una altura de 2.5 m sobre una plataforma horizontal de masa despreciable. Deseamos diseñar un dispositivo resorte-amortiguador, sobre el que montaremos la plataforma, de tal modo que tras el impacto ésta se sitúe en una posición de equilibrio 12.1 cm por debajo de la posición inicial tan rápidamente como sea posible. **a)** Calcular la constante elástica k del resorte y el coeficiente de amortiguamiento γ del sistema. **b)** ¿Se rebasará la posición de equilibrio? En caso afirmativo, calcular el descenso máximo de la plataforma. **c)** ¿Qué tiempo empleará la plataforma para encontrarse a 1 mm de su posición final? **d)** Calcular la altura máxima desde la que puede caer el fardo para que no se rebase la posición inicial final de equilibrio.



Prob. 14.21

14.22.- Con los mismos datos del Problema 14.21, deseamos ahora que no se rebase la posición final de equilibrio. **a)** ¿Cuál será el valor mínimo del coeficiente de amortiguamiento γ del sistema? **b)** ¿Qué tiempo empleará, ahora la plataforma hasta encontrarse a 1 mm de su posición final?

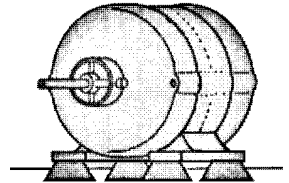
14.23.- Una masa de 0.25 kg está unida a un muelle cuya constante elástica es $k=200$ N/m, siendo la constante de amortiguamiento $\gamma=3$ kg/s. La masa está impulsada por una fuerza externa $F=5 \sin 30t$ (N). **a)** ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? ¿Cuál es el ángulo de desfase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento? **b)** Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se

producirá la resonancia en amplitud? ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones en la resonancia?

14.24.- Un oscilador forzado (sin amortiguamiento) está constituido por un muelle de constante elástica $k=450$ N/m y una masa de 2 kg. Se le aplica una fuerza impulsora sinusoidal, cuyo valor máximo es 20 N, siendo su frecuencia $\omega=3$ rad/s. **a)** ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones? ¿Y el periodo de las mismas? **b)** ¿Qué energía quedará almacenada en el oscilador en el estado estacionario? **c)** ¿Qué potencia media absorbe el oscilador en el estado estacionario? **d)** Repetir los tres apartados anteriores para una fuerza impulsora $F=20 \sin 16t$ (N).

14.25.- Un oscilador armónico no amortiguado está constituido por una masa $m=100$ g unida a un muelle de constante elástica $k=40\,000$ dyn/cm. Se le aplica una fuerza impulsora $F=3\,000 \sin 10t$ (dyn). Calcular la amplitud de las oscilaciones del oscilador en el estado estacionario y el desfase entre la fuerza impulsora y la velocidad.

14.26.- La mayor parte de los motores eléctricos comerciales no están perfectamente equilibrados, de modo que, cuando el motor está en marcha, se producen vibraciones de la misma frecuencia angular que la del rotor. Deseamos absorber esas vibraciones, para lo que colocamos el motor sobre cuatro amortiguadores, como se muestra en la figura. Sea m la masa del motor y ω su velocidad angular, ¿cuál será el valor más idóneo de la constante elástica k de cada uno de los amortiguadores para el fin propuesto?



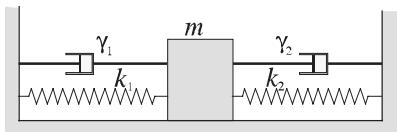
Prob. 14.26

14.27.- Se cuelga un objeto de 2 kg de masa del extremo inferior de un muelle de masa despreciable. En esas condiciones, el muelle se alarga 6 cm. Hacemos oscilar hacia arriba y hacia abajo el extremo superior del muelle, con un movimiento armónico simple de 1 mm de amplitud. La Q del sistema es 20. **a)** ¿Cuál deberá ser la frecuencia de las oscilaciones del extremo superior del muelle para que sea máxima la amplitud de las oscilaciones del objeto? **b)** ¿Cuánto valdrá dicha amplitud

máxima? c) ¿Qué potencia está suministrando la fuerza impulsora?

14.28.- En el oscilador del Problema 14.27, supóngase ahora que la frecuencia de la fuerza impulsora es $\omega=2\omega_0$. a) ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones del objeto suspendido? b) ¿Qué potencia suministra la fuerza impulsora?

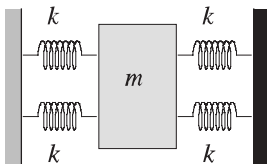
14.29.- Un oscilador amortiguado está caracterizado por su masa $m=10$ g, su constante elástica $k=360$ dyn/cm y su constante de amortiguamiento $\gamma=40$ g/s. Se le aplica al oscilador una fuerza impulsora de 15 rad/s de frecuencia angular y 400 dyn de amplitud. a) Averiguar si el oscilador está infra o sobreamortiguado. b) Calcular la impedancia del oscilador a la frecuencia impuesta y el desfase angular entre la velocidad y la fuerza aplicada. c) Calcular la "amplitud" de la velocidad. d) Calcular la amplitud de la elongación. e) Dibujar los esquemas fasoriales convenientes.



Prob. 14.30

14.30.- En el dispositivo que se muestra en la figura, determinar los parámetros del *muelle-amortiguador equivalente* (k_{eq} , γ_{eq}), así como la frecuencia natural y la de las oscilaciones amortiguadas del oscilador.

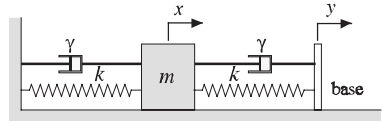
14.31.- En el sistema que se muestra en la figura, todos los muelles tienen la misma longitud natural, una constante elástica $k = 200$ N/cm y están tensados en la posición de equilibrio. Al bloque, cuya masa es 2 kg, se le aplica una fuerza periódica horizontal de 100 N de amplitud y $150/\pi$ Hz de frecuencia.



Prob. 14.31

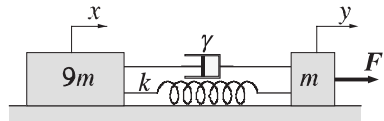
a) Determinar la amplitud de las oscilaciones del bloque. b) Calcular las constantes de amortiguamiento (γ) de dos amortiguadores idénticos,

colocados cada uno a un lado del bloque, para que el amortiguamiento sea crítico.



Prob. 14.32

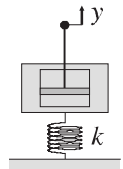
14.32.- En el dispositivo de la figura, $m = 200$ g, $k = 14.4$ N/m y $\gamma = 0.08$ kg/s. Se imprime a la base un m.a.s., con una amplitud de 1 cm y una frecuencia angular ω , mediante la aplicación de una fuerza horizontal. Calcular la amplitud de las oscilaciones del bloque cuando la frecuencia impuesta es: a) igual a la frecuencia natural del sistema; b) el doble de dicha frecuencia.



Prob. 14.33

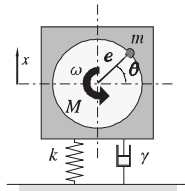
14.33.- En el sistema que se representa en la figura, el bloque de la derecha realiza una oscilación armónica $y = B \sin \omega t$ bajo la acción de una fuerza impulsora apropiada F . Supondremos que el amortiguamiento del sistema sea muy débil. a) Determinar el valor de la frecuencia impuesta ω para que sea máxima la amplitud de las oscilaciones del bloque de la izquierda. b) Calcular la amplitud de las oscilaciones del bloque de la izquierda en la resonancia. c) En las condiciones del apartado anterior, determinar la expresión de la fuerza aplicada al bloque de la derecha. ¿Es armónica dicha fuerza?

14.34.- El pistón que se muestra en la figura oscila, con m.a.s. definido por $y = B \sin \omega t$, en el interior de un cilindro, de masa m , soportado por un muelle de constante k . Entre el pistón y la paredes del cilindro existe fricción viscosa caracterizada por un constante de amortiguamiento γ . Determinar la amplitud de las oscilaciones del cilindro y el desfase de éstas con las del pistón.



Prob. 14.34

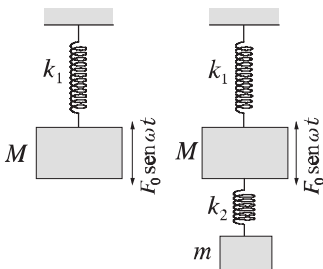
14.35.- Un ventilador industrial pesa 50 kg y en su rotación, a una velocidad angular constante de 1000 rpm, está afectado de un desbalanceamiento de 0.25 kg·m. Se desea que tan sólo el 10% de la fuerza vertical asociada al desbalanceamiento se transmita al suelo, para lo que se dispone de un sistema de amortiguación, como se esquematiza en la figura, cuyo factor de amortiguamiento es $\zeta=0.2$. **a)** Determinar la constante k del muelle. **b)** Evaluar la amplitud de la fuerza transmitida al suelo.



Prob. 14.35

14.36.- Para atenuar las vibraciones que se pudieran transmitir a un instrumento muy sensible, se coloca éste sobre un *base aislante*. El aislante, cuya constante de amortiguamiento es muy pequeña, se deforma 3 mm bajo una carga de 30 kg. **a)** Calcular la frecuencia de resonancia (ω_0). **b)** Determinar la *transmisibilidad* del aislante a la frecuencia de resonancia. **c)** Ídem a una frecuencia $4\omega_0$. **d)** Ídem a una frecuencia $8\omega_0$.

14.37.- Empleamos un vibrómetro, cuya frecuencia natural es de 6 Hz y amortiguamiento despreciable, para medir la magnitud de las vibraciones de una estructura mecánica. La lectura del vibrómetro nos indica un desplazamiento relativo de 0.5 mm cuando la estructura está vibrando con una frecuencia de 2 Hz. Determinar las amplitudes de desplazamiento, velocidad y aceleración asociadas a las vibraciones de la estructura.

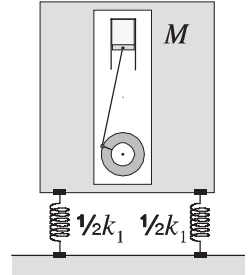


Prob. 14.38

14.38.- Absorción dinámica de vibraciones. En la figura de la izquierda, la masa M está sometida a una vibración forzada de frecuencia angular ω . Con la finalidad de reducir tanto como sea posible la amplitud de las oscilaciones de la masa M , añadimos un dispositivo

auxiliar masa-muelle, como se indica en la figura de la derecha. **a)** Encontrar las expresiones de las amplitudes de las vibraciones de las masas M y m . **b)** Determinar las características (m, k_2) del dispositivo auxiliar para conseguir el fin propuesto.

* **14.39.-** Una pequeña máquina compresora pesa 25 kg y trabaja a 3000 rpm. Una vez que ha sido instalada, como se indica en la figura, nos encontramos con que la frecuencia de las vibraciones forzadas producidas por el funcionamiento de la máquina tiene un valor muy próximo al de la frecuencia natural del sistema. Determinar las características del absorbente dinámico de vibraciones que deberemos añadir si la *frecuencia natural más baja* del sistema completo debe ser como mucho el 80% de frecuencia forzada (a fin de evitar la resonancia). AYUDA: Obsérvese que este sistema es equivalente al analizado en el Problema 14.38.



Prob. 14.39

14.40.- Calcular la anchura de la resonancia y el factor de calidad Q de un sistema oscilante cuya frecuencia natural es de 100 Hz, si su parámetro de amortiguamiento es 20 s^{-1} .

14.41.- La potencia media suministrada a un sistema oscilante, cuya frecuencia natural es ω_0 , por una fuerza impulsora periódica, de frecuencia ω , se reduce a la mitad de su valor máximo para $\omega=0.96\omega_0$ y $\omega=1.04\omega_0$. Determinar el valor del factor de calidad Q del sistema.