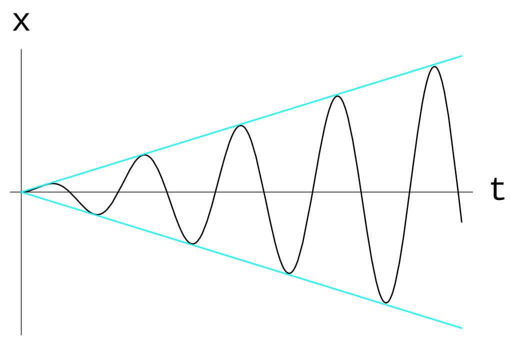
AMPLIACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

EDO∫



$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t)$$

Renato Álvarez Nodarse

Diplomatura de Estadística

"Ampliación de Análisis Matemático".

PROF. RENATO ÁLVAREZ NODARSE

Índice

Diplomatura de Estadística

“Ampliación de Análisis Matemático”.

Programa de la asignatura. Curso 2003/2004

Capítulo 1: Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias. La EDO lineal de primer orden.

Motivación de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). La EDO lineal de primer orden. Teorema de existencia y unicidad para la EDO lineal de orden 1. Aplicaciones.

Capítulo 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones separables. Ecuaciones lineales. Ecuaciones de Bernoulli y de Ricati. Ecuaciones diferenciales exactas. Aplicaciones. Métodos en diferencias para resolver EDOs de primer orden: El método de Euler.

Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Sistemas lineales con coeficientes constantes. La matriz exponencial e^A y sus propiedades. Ejemplos y aplicaciones.

Capítulo 4: Ecuaciones diferenciales de orden n.

EDOs de orden n. Relación con los sistemas de ecuaciones de primer orden. Ecuaciones lineales. EDOs lineales de orden 2. Método de variación de coeficientes. Reducción de orden.

Capítulo 5: Método de las series de potencias.

Método de integración por series. Puntos regulares y singulares. La ecuación hipergeométrica de Gauss. La ecuación de Bessel. Aplicaciones.

Capítulo 6: Polinomios ortogonales clásicos.

La ecuación de tipo hipergeométrico y sus soluciones polinómicas. Los polinomios clásicos. Ortogonalidad y relación de recurrencia. Fórmula de Rodrigues. Los momentos de las distribuciones continuas de probabilidad. Funciones generatrices.

Capítulo 7: EDOs: Existencia y unicidad de las soluciones.

Método de Picárd. Teorema de existencia y unicidad para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Los sistemas lineales y la EDO de orden n.

Capítulo 8: Ecuaciones en diferencias finitas.

Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas: Ejemplos. Existencia de la solución. La ecuación de segundo orden de tipo hipergeométrico. Polinomios clásicos discretos. La ecuación de Pearson y los momentos de las distribuciones discretas de probabilidad. Funciones generatrices.

Metodología y Evaluación

La asignatura está dividida en 3 horas teóricas y 2 horas prácticas semanales. Las horas de teoría se dedicarán a la explicación de los principales conceptos y métodos de resolución de EDOs tanto de orden uno como de órdenes superiores. Además se desarrollarán distintos ejemplos que permitan aplicar y profundizar los métodos aprendidos. Las horas prácticas se dedicarán a proponer y resolver diversos ejercicios que permitan al alumno una comprensión más profunda de los conceptos teóricos y que sirvan de complemento a las clases teóricas.

Al final del cuatrimestre se se efectuará un exámen final constituido por una parte teórica-práctica y otra de problemas. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 5 puntos. También se entregarán varios proyectos sobre temas relacionados con el programa que complementen los tratados en clase. Dichos proyectos son totalmente voluntarios y no serán evaluados en el exámen aunque si pueden complementar la nota de éste, sólo en caso de mejorarla.

Bibliografía

Bibliografía básica

- C. H. Edwards, Jr y David E. Penney, *Ecuaciones diferenciales elementales.* Pearson Educación

- Nagle R.K. y Saff E.B. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales.* Pearson Educación.

Colecciones de problemas

- A. K. BOIARCHUK y G. P. GOLOVACH, Matemática Superiores. Problemas Resuetos: Ecuaciones diferenciales (Anti-Demidovich) Vol 8, 9 y 10 (URSS, 2002).

Bibliografía complementaria

- Braun M. *Differential Ecuations and their Applications.* Springer Verlag.

- Bugrov Ya.S., Nikolski S.M. *Ecuaciones diferenciales. Integrales mltiples. Series. Funciones de variable compleja.* MIR.

- Elsgoltz L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* MIR.

- Kisilev A., Krasnov M. y Makarenko G. *Problemas de Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Ed. MIR.

- Marcellán, F., Casasús, L. y Zarzo, A., *Ecuaciones diferenciales: Problemas lineales y aplicaciones. McGraw-Hill.*

- Rainville E.D., Bedient P.E. y Bedient R.E. *Ecuaciones diferenciales.* Prentice Hall.

- Simmons, G.F. *Ecuaciones diferenciales : con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill.

Renato Álvarez Nodarse. Facultad de Matemáticas. Despacho: 1er piso, Mod 15, No. 15-06

1. Introducción a las EDOs: la EDO lineal de primer orden

Todos sabemos que es una ecuación. Por ejemplo

$$3x+2=5, \qquad x^2+4x=-3, \qquad x^2+1=0, \qquad \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0.$$

Estas ecuaciones, quizá las más sencillas, son *ecuaciones algebraicas* ya que involucran sólo las operaciones *suma, resta, multiplicación* y *división*. La incógnita en este caso es una única variable x que puede ser real o compleja. Por ejemplo, para la primera ecuación es fácil ver que $x=1$ es la única solución posible, mientras que la segunda tiene dos soluciones reales $x=1$ y $x=3$. La tercera sin embargo no tiene soluciones reales, pero si complejas $x=\pm i$. Finalmente la última no tiene ninguna solución pues la única posible sería $x=1$ que no puede ser solución ya que la propia ecuación no está definida en $x=1$ (división por cero).

Hasta ahora hemos visto ecuaciones "sencillas" en el sentido que su solución es un conjunto de números determinado. Existen ecuaciones más "complicadas", las ecuaciones funcionales donde las incógnitas son funciones. En ejemplo de éstas son las *ecuaciones diferenciales "ordinarias"*. Éstas son ecuaciones que involucran tanto a las funciones buscadas como sus derivadas "ordinarias". Por ejemplo,

$$y'(x)=\operatorname{sen} x, \quad y'(x)=y, \quad y''(x)-e^{y(x)}+7\cos x=0, \quad y''(x)+3y'(x)+2y(x)=2\cos(2x).$$

Estas ecuaciones son el objetivo del presente curso. Es fácil entender que el problema de encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales es más complicado que el de los casos anteriores. En primer lugar por que estamos buscando funciones de x y no simples valores de x. En segundo, porque tarde o temprano tendremos que calcular primitivas lo cual es bastante complicado en general.

1.1. Ecuaciones diferenciales "ordinarias"

Nos centraremos en las ecuaciones del tipo

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

donde $y=y(x)$ es cierta función n veces derivable en algún intervalo $I\subset\mathbb{R}$. Diremos que una ecuación diferencial del tipo (1.1) es de *orden* n si en ella aparece la derivada $y^{(n)}$, es decir el orden de una EDO coincide con el mayor orden de la derivada de la función incógnita y. Así, por ejemplo la ecuación $y'+3y=2$ es de orden uno, $y''+e^y-1=0$ es de orden dos, $y^{(5)}+3\operatorname{sen} x-y''=0$ es de orden cinco.

Diremos que $y=y(x)$ es una solución de la (1.1) en cierto dominio $A\subset\mathbb{R}$ si al sustituir la función $y=y(x)$, (1.1) se transforma en una identidad para todo $x\in A$, o sea

$$y=y(x) \text{ es solución en } A \quad \Longleftrightarrow \quad F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x))=0, \quad \forall x\in A.$$

Nuestro principal objetivo es aprender a resolver EDOs. En particular el denominado *problema de valores iniciales* (PVI), es decir encontrar aquella solución y de la ecuación $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ que cumpla con las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

1.2. La EDO lineal de primer orden

Definición 1.1 *La ecuación*

$$\frac{d\,y(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \qquad a(x), b(x) \in C_I. \tag{1.2}$$

(como incógnita tenemos a la función derivable $y(x)$) se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden. Si $b(x) \equiv 0$ la ecuación se denomina ecuación homogénea y si $b(x) \neq 0$, ecuación no homogénea.

La solución general de (1.2) se expresa de la forma

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)\,dx} + e^{-\int a(x)\,dx} \int e^{\int a(x)\,dx}\, b(x)\,dx \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.2 *Encontrar la solución de la ecuación lineal $\dfrac{d\,y}{d\,x} + x\,y = 2x$.*

Tenemos

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int e^{\frac{x^2}{2}} 2x\,dx = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2.$$

Definición 1.3 *El problema de encontrar una solución de la ecuación (1.2) con la condición que $y(x)$ tome cierto valor y_0 cuando $x = x_0$ se denomina problema de valores iniciales PVI para la EDO lineal de primer orden, o sea,*

$$\frac{d\,y(x)}{dx} + a(x)y(x) = b(x), \qquad a(x), b(x) \in C_I, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.4 *Resolver la EDO del ejemplo 1.2 con la condición inicial $y(0) = 1$.*

Como la solución general es $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$, tenemos $y(0) = 1 = C + 2$, de donde $C = -1$ y $y(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Teorema 1.5 *(existencia y unicidad de la solución del PVI para una EDO lineal 1er orden)*

Sea el problema de valores iniciales (1.4). Si $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contenga al punto $x_0 \in I$, entonces, para cualquiera sea el valor y_0, existe una única solución del problema de valores iniciales (1.4).

En general, la solución del PVI es

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right)\left[\int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\right) b(t)\,dt\right]. \tag{1.5}$$

1.3. Algunas aplicaciones de las EDOs lineales de primer orden

Ejemplo 1.6 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que el segmento de la tangente t a la curva y en un punto cualquiera $P(x, y)$ dibujado entre P y el eje $0y$ quede bisecado por el eje Ox.* $y' = 2y/x$

Ejemplo 1.7 *Encontrar una familia de curvas $y(x)$ tal que la pendiente de la tangente t a la curva y en cada punto sea la suma de las coordenadas del punto. Encuentra además la curva que pasa por el origen.*

Ejemplo 1.8 *Se sabe que la intensidad i del circuito eléctrico representado en la figura 1 está gobernada por la ecuación diferencial*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U,$$

donde L es la impedancia, R la resistencia y U el voltaje. Supongamos que el voltaje U es constante y que $i(0) = i_0$. Encontrar la dependencia de i respecto al tiempo t. Realizar el mismo estudio si $U = U_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

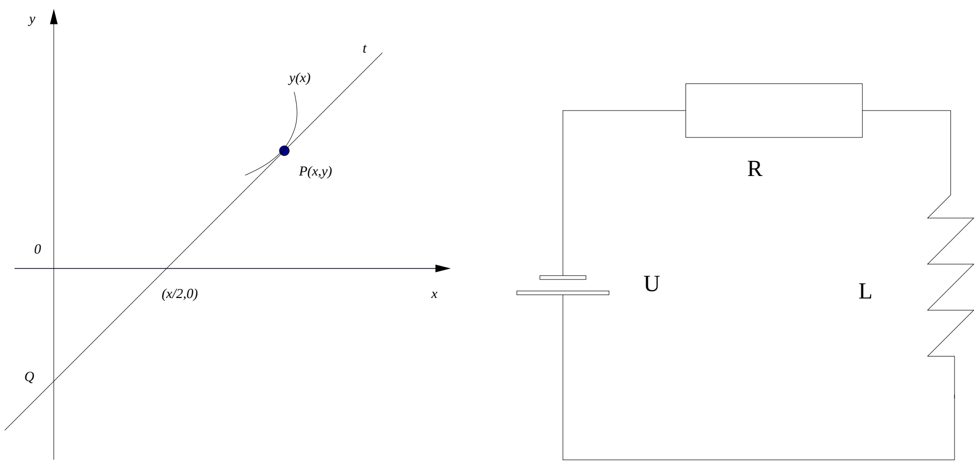


Figura 1: Curva del ejemplo 1.6 (derecha) y circuito eléctrico del ejemplo 1.8 (izquierda)

Ejemplo 1.9 *La ecuación barométrica de Pascal es la EDO*

$$p'(h) = -\lambda p(h), \qquad \lambda > 0,$$

donde p es la presión en función de la altura h. Si $h = 0$, la presión al nivel del mar (1 atm). ¿Cómo varía la presión con la altura?

Ejemplo 1.10 *La descomposición radioactiva*

Si N es el número de átomos de una substancia radioactiva, entonces

$$N(t + h) - N(t) = -\lambda N(t)h \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{N(t + h) - N(t)}{h} = -\lambda N(t).$$

Sierra	altura máxima (metros)	presión (atm)
Grazalema (Cádiz)	1654	0.81
Picos de Europa (Cantabria)	2648	0.71
Sierra Nevada (Granada)	3478	0.64
Teide (tenerife)	3710	0.62
Everest (Himalaya)	8848	0.32

Si $h \to 0$, entonces podemos aproximar la ecuación anterior mediante la siguiente EDO

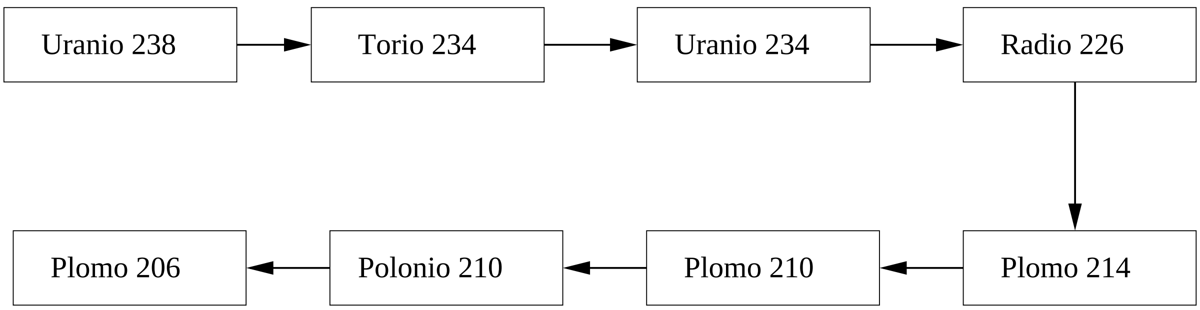
$$N'(t) = -\lambda N(t), \qquad N(t_0) = N_0. \tag{1.6}$$

Se llama *período de semi-desintegración* al tiempo necesario para disminuir en la mitad el número de átomos,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\log 2}{T} = \frac{0{,}693147}{T}.$$

Elemento	Período T	λ
Radio 226 $\to$ Plomo 214	1600 años	0.000433217 1/años
Plomo 214 $\to$ Plomo 210	47 min	0.0147478 1/min
Plomo 210 $\to$ Polonio 210	22 años	0.0315067 1/años
Polonio 210 $\to$ Plomo 206	138 días	.00502281 1/dias
Carbono 14 $\to$ Nitrógeno 14	5568 años	0.000124488 1/años
Uranio 238 $\to$ Torio 234	$4{,}5110^9$ años	$1{,}5101210^{-10}$ 1/años

En muchos casos un elemento radioactivo puede obtenerse a partir de otros mediante una *cadena radioactiva*. E.g.



Así, por ejemplo, si estudiamos la cantidad de Plomo 210 que hay en una muestra tenemos que tener en cuenta no sólo la cantidad que se desintegra sino la que aporta cualquiera de los elementos que aparecen por encima de él en la cadena radioactiva. Por ejemplo, prácticamente en cualquier muestra que tomemos siempre hay una determinada cantidad de Radio 226, lo que implica una aportación a la cantidad de Plomo 210 después de varias desintegraciones. Si llamamos a esa aportación $r(t)$, entonces la ecuación que gobierna la desintegración del Plomo 210 es la siguiente

$$N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \qquad N(t_0) = N_0, \tag{1.7}$$

donde $r(t)$ representa la cantidad de átomos de Radio que se desintegra en la muestra. La solución de la ecuación anterior es fácil de encontrar usando la fórmula (1.5).

1.4. Problemas

Problema 1.11 *Decide si las funciones $y(x)$ definidas explícitamente o implícitamente son soluciones de la EDO $F(x,y,y)=0$ dada y determina la región de $\mathbb{R}$ donde dicha solución está definida:*

1. $f(x,y) = y - e^x + 2 = 0, \quad F(x,y,y') = y' - y'' = 0$
2. $f(x,y) = y - \frac{2}{2+x} = 0, \quad F(x,y,y') = xy' + y - y^2 = 0$
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad F(x,y,y') = yy' + x = 0$
4. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad F(x,y,y') = (y^2 - x)y' - y + x^2 = 0$
5. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad F(x,y,y') = yy' + x = 0$
6. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2} - y = 0, \quad F(x,y,y') = (1+x^2)y' - xy = 0$
7. $f(x,y) = e^{2x} + e^{y-x} - 1 = 0, \quad F(x,y,y') = e^{x-y} + e^{y-x}y' = 0$
8. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad F(x,y,y') = y' + y/x = 0$

Problemas de EDOs lineales

Problema 1.12 *Encuentra la solución general de las siguientes EDO lineales de primer orden*

1. $y' + y\cos x = 0$
2. $y' + y\sqrt{x} = 0$
3. $y' + 2xy = x$
4. $y' + y = xe^x$
5. $y' + x^2 y = x^2$
6. $x\,y' + y = x^3$
7. $y' = (y + e^{-x})\tan x$
8. $y' + 2y = f(x),\ f(x) = 3e^{-2x},$
9. $y' + xy = f(x),\ f(x) = 3/4e^{-2x},\ f(x) = \text{sen } x$
10. $x\,y' + y\ \cos x = 1/2\sin(2x)$
11. $x\,y' + y = x\,\text{sen}\,x$

Problema 1.13 *Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales y la solución correspondiente a las condiciones iniciales indicadas:*

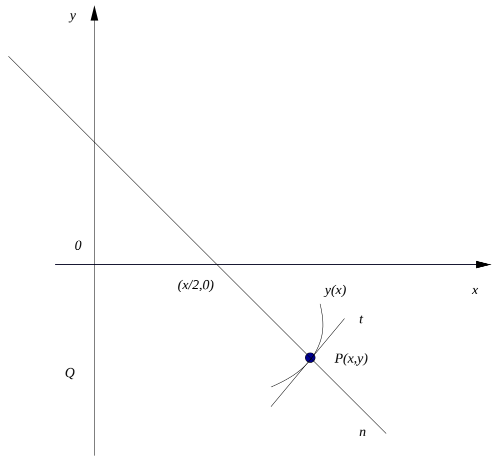
1. $y' = 3y + e^{5x}, \quad y(1) = 0.$
2. $y' = 6y + x^2, \quad y(0) = 2.$

3. $y' = y + e^{-x} sen(2x), \quad y(0) = 1.$

4. $(1 + x^2)y' + 4xy = x, \quad y(1) = 1/4.$

5. $y' + y = g(x), \quad y(0) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Problema 1.14 *Encontrar la ecuación de la familia de curvas tal que el segmento de la normal entre la curva y y el eje* $0y$ *es biseccionado por el eje* $0x$. *Encontrar la curva que pasa por* $(4, 2)$. *(sol.* $x^2 + 2y^2 = 24$*).*



Curva del problema 1.14.

Problema 1.15 *a) Prueba que cualquier solución* $y(x)$ *de la ecuación*

$$y' + ay = be^{-cx}, \qquad a, c \in (0, \infty), \quad b \in \mathbb{R},$$

es tal que $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ *independientemente del valor* $y(0) = y_0$ *inicial.*

b) Prueba que cualquier solución $y(x)$ *de la ecuación*

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad a(x) \geq c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to \infty} b(x) = 0, \quad a(x), b(x) \in C_{\mathbb{R}},$$

es tal que $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ *independientemente del valor* $y(0) = y_0$ *inicial.*

2. Otras EDOs de primer orden

2.1. Ecuaciones separables

Comenzaremos por las ecuaciones separables. Supongamos que la función $f(x,y)$ en la EDO

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

admite la factorización $f(x,y) = a(x)b(y)$. Cuando esto ocurre se dice que la EDO (2.1) es una ecuación separable. Un ejemplo trivial de ecuación diferencial separable es la ecuación diferencial lineal homogénea (1.2) cuando $b \equiv 0$.

En general tenemos

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{b(y)} = a(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{b(y)}dy = \int a(x)dx,$$

luego la solución de la ecuación separable es

$$G[y(x)] = A(x) + C,$$

donde $G(y)$ es una primitiva de $1/b(y)$ y $A(x)$ es una primitiva de $a(x)$.

Ejemplo 2.1 *Resolver la ecuación $y' = x/y$.*

Usando lo anterior tenemos

$$ydy = xdx \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = x^2 + C.$$

La expresión anterior define una familia de curvas en $\mathbb{R}^2$ que son solución de la ecuación diferencial propuesta. En general la solución es $y(x) = \pm\sqrt{C + x^2}$, donde el signo $+$ o $-$ dependerá de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si nos interesa el PVI con la condición $y(0) = 3$, entonces $C = 9$ y la solución será $y(x) = \sqrt{9 + x^2}$.

2.1.1. Aplicaciones

Ejemplo 2.2 *Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \to C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b. Se sabe que la velocidad la velocidad de formación de C es proporcional a la concentración de A y B. Lo anterior nos conduce a la EDO*

$$x' = \varkappa(a - x)(b - x), \qquad x(0) = 0, \tag{2.2}$$

donde $\varkappa$ es la constante de proporcionalidad.

Supongamos que $a \neq b$, entonces tenemos

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \varkappa dt \quad \Longrightarrow \quad \log\frac{a-x}{b-x} = (a-b)\varkappa t + C, \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-x}{b-x} = Ce^{(a-b)\varkappa t},$$

como $x(0) = 0$, $C = a/b$, luego

$$x(t) = ab\frac{1 - e^{(a-b)\varkappa t}}{b - ae^{(a-b)\varkappa t}}.$$

Ejemplo 2.3 *La velocidad de escape de la Tierra*

Nos interesa resolver el problema de encontrar la velocidad de escape al espacio exterior de un cuerpo que se encuentre en la superficie de la tierra. Si usamos la ley de Newton tenemos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM_T}{r^2},$$

donde G es la constante universal gravitatoria y M_T es la masa de la tierra. Como $g = GM_T/R^2$, siendo R el radio de la tierra (que supondremos una esfera), tenemos $GM_T = gR^2$. Obviamente r varia con el tiempo por lo que la ecuación anterior se torna algo complicada a simple vista. Usando la regla de la cadena tenemos

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

La solución de esta EDO usando el método de separación de variables es $v^2 = 2gR^2/R + C$. Supongamos que v_0 es la velocidad inicial del cuerpo sobre la superficie terrestre, entonces, la velocidad del cuerpo a cualquier distancia de la tierra viene dada por

$$v^2 = \frac{2gR}{r} + v_0^2 - 2gR.$$

Para que nuestra nave escape definitivamente de la tierra es suficiente que $v \geq 0$ cuando $r \to \infty$, lo cual nos conduce al valor $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. Poniendo los datos $R = 6400000$ metros $g = 9{,}8 m/s^2$ obtenemos $v_0 = 11200 m/s = 11{,}2 Km/s$.

Ejemplo 2.4 *La caída de un cuerpo en un medio viscoso se puede modelizar mediante la ecuación para la velocidad $v(t)$*

$$v' = g - \kappa v^r, \qquad v(0) = v_0, \tag{2.3}$$

donde g y κ son ciertas constantes (la gravedad y la viscosidad).

Resolvamos la ecuación

$$\frac{dv}{g - \kappa v^r} = dt \quad \Longrightarrow \quad t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - \kappa v^r} = \frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 - \omega^2 v^r}, \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{g}.$$

Escojamos $r = 2$, por ejemplo. Entonces

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1 - \omega^2 v^r} = \frac{1}{2\omega} \log \frac{(1 + \omega v)}{(1 - \omega v)} \frac{(1 - \omega v_0)}{(1 + \omega v_0)} = g(t - t_0).$$

Despejando v tenemos la solución

$$v(t) = \frac{1}{\omega} \frac{\left(\frac{1+\omega v_0}{1-\omega v_0}\right) e^{2g\omega(t-t_0)} - 1}{\left(\frac{1+\omega v_0}{1-\omega v_0}\right) e^{2g\omega(t-t_0)} + 1}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{g}} > 0.$$

Como $\omega > 0$, entonces si $t \to \infty$ el cuerpo sólo podrá alcanzar la velocidad límite $v_{max} = 1/\omega$ independiente del valor v_0 inicial.

Ejercicio 2.5 *Resolver el caso $r = 3$.*

2.1.2. El modelo de crecimiento de poblaciones

Imaginemos que tenemos una población de cierta especie (consideraremos que tenemos un número bastante alto de individuos) y sea $p(t)$ el número de individuos de dicha especie en el momento t (evidentemente $p(t) \in \mathbb{N}$). Sea $r(t,p)$ la diferencia entre en índice de natalidad y mortalidad de la población. Supongamos que la población está aislada (o sea, no hay emigración ni inmigración). Entonces la variación $p(t+h) - p(t)$ es proporcional a $p(t)h$ y el coeficiente de proporcionalidad es $r(t,p)$. Luego

$$p(t+h) - p(t) = r(t,p)p(t)h, \quad h \to 0, \quad \Longrightarrow \quad p'(t) = r(t,p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si consideramos $r(t,p) = r$, constante. Así, la población de individuos de la especie puede ser modelizada mediante el PVI

$$p'(t) = r\,p(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r > 0, \tag{2.4}$$

cuya solución $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$. El modelo anterior se conoce como modelo de Malthus o modelo maltusiano pues fué propuesto por el economista inglés Thomas R. Malthus (1766–1834). Si $r < 0$ la especie esta condenada a la extinción y si $r > 0$ ésta crece en proporción geométrica.

Aunque el modelo funciona razonablemente bien para poblaciones grandes, hay que hacer varias correcciones pues si $p(t)$ empieza a crecer demasiado habrá muchos otros factores como la falta de espacio o de alimentos que frenará el crecimiento. Por tanto varios años después en 1837 un matemático y biólogo holandés, P. F. Verhulst, propuso un modelo algo más realista conocido como el modelo logístico. Verhulst razonó que como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces tendremos que sustraerle al término rp un término cp^2, de forma que la EDO que modeliza una población será

$$p'(t) = r\,p(t) - cp^2(t), \qquad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0. \tag{2.5}$$

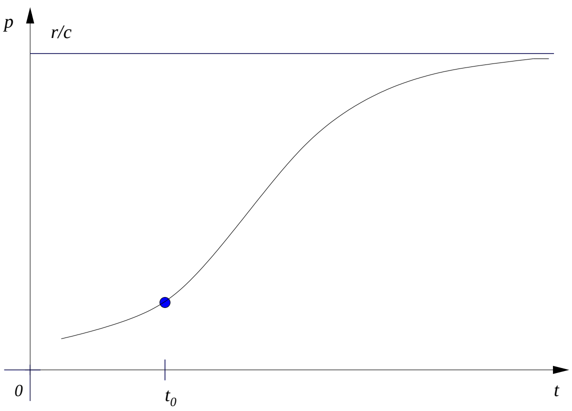


Figura 2: Evolución de la población según el modelo logístico 2.5.

En general c ha de ser mucho más pequeño que r ya que si r no es muy grande la EDO (2.4) es una aproximación bastante buena, pero si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-cp^2$ no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial. Resolviendo la EDO (2.5) tenemos

$$p(t) = \frac{rp_0 e^{r(t-t_0)}}{r - cp_0 + cp_0 e^{r(t-t_0)}}. \tag{2.6}$$

Además, $\lim_{t\to\infty} p(t) = r/c$ independientemente de p_0. En el caso cuando $0 < p_0 < r/c$ la evolución de la población está representada en la gráfica 2.

Este modelo se ha comprobado con varias especies y ha dado muy buenos resultados, en particular, el hecho de que la población se estabilice ha sido comprobado en distintos experimentos con paramecios obteniéndose una gran concordancia entre los resultados teóricos y experimentales.

2.2. Problemas

Problema 2.6 *Encuentra a ser posible todas las soluciones $y(x)$ definidas explícitamente si se puede o implícitamente de las EDOs siguientes*

1. $(1+x^2)y' = 1+y^2$
2. $y' = xy(y+2)$
3. $y(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$
4. $y' = 1-x+y^2-xy^2$
5. $\operatorname{cotg}(y)y' = x^2+2$
6. $(x\log x)y' + \sqrt{1+y^2} = 0$
7. $\cos(y)y' + e^{x+1}\tan y = 0$
8. $(xy+y)y' + e^{y^2}(x^2+2x+1) = 0$

Problema 2.7 *Encuentra las soluciones $y(x)$ de los siguientes problemas de valores iniciales:*

1. $y' = y(a+by),\ y(x_0) = y_0 > 0,\ a, b > 0.$
2. $(1-x)y' = (x+1)y,\ y(0) = 0$
3. $yy' + x - 3xy^2 = 0,\ y(2) = 1$
4. $\cos(y)y' = -\frac{x \operatorname{sen} y}{1+x^2},\ y(1) = \pi/2$
5. $3xy' = y\cos x,\ y(1) = 0$
6. $x^2y' - 1 = \cos(2y),\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 5\pi/4$

2.3. Ecuaciones que se reducen a EDOs lineales o separables

2.3.1. Ecuaciones reducibles a EDOs lineales: Las EDOs de Bernoulli y Riccati

En 1695 Johann Bernoulli propuso la resolución de la EDO

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \qquad n \neq 0, 1. \tag{2.7}$$

La resolvió su hermano Jacob en 1696. Ese mismo año Leibniz propuso el cambio $z = y^{1-n}$ que transformaba la EDO (2.7) en una EDO lineal. En efecto, haciendo

$$z = y^{1-n}, \quad z' = (1-n)y^{-n}y', \quad \Longrightarrow \quad z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x),$$

que es lineal y por tanto podemos usar la fórmula (1.3) para resolverla.

Ejemplo 2.8 *Resolver la EDO* $y' - 1/(3x)y = y^4 \log x$.

Esta ecuación es una EDO de Bernoulli con $n = 4$. Hacemos el cambio $z = y^{-3}$, y tenemos $y' = -y^4 y'/3$, $y = y^4 z$, luego la EDO se transforma en

$$z' + \frac{1}{x}z = -3\log x, \quad \Longrightarrow \quad z = -\frac{C}{x} - \frac{3}{2}x\log x + \frac{3}{4}x,$$

de donde obtenemos

$$y = \left(-\frac{C}{x} - \frac{3}{2}x\log x + \frac{3}{4}x\right)^{-1/3}.$$

Pasemos a estudiar la EDO de Riccati. En 1724 Jacopo Francesco Riccati estudió la EDO

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x), \tag{2.8}$$

que había considerado años antes Jacob Bernoulli. La ecuación anterior generalmente es imposible de resolver analíticamente (en cuadraturas) a no ser que se sepa una solución particular y_p. Supongamos que y_p es una solución particular de (2.8), y hagamos el cambio $z = y - y_p$. Obtenemos

$$z' + [p(x) + 2q(x)]z + q(x)z^2 = 0,$$

que es una ecuación de Bernoulli la cual mediante el cambio $w = 1/z$ podemos convertir en una lineal.

En general, dada una EDO de Riccati (2.8), mediante el cambio $y = y_p + 1/z$, la podemos convertir en una EDO lineal. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.9 *Resolver la EDO de Riccati* $y' = y^2 - 2/x^2$.

La forma de la EDO nos induce a buscar una solución del tipo $y = c/x$. Sustituyendo en la EDO descubrimos que las funciones $y = 1/x$ e $y = -2/x$ son soluciones particulares. Usemos la primera para resolver la EDO. Hacemos el cambio $y = 1/x + 1/z$,

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}, \quad \Longrightarrow \quad z' + \frac{2}{x}z = -1.$$

La solución la encontramos usando la fórmula (1.3) que nos da

$$z = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}, \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}.$$

2.3.2. Ecuaciones del tipo $y' = F(\alpha x + \beta y)$

Sea la EDO
$$y' = F(\alpha x + \beta y), \tag{2.9}$$
y hagamos el cambio $z = \alpha x + \beta y$, entonces $z' = \alpha + \beta y'$, luego (2.9) se transforma en la EDO separable
$$z' = \alpha + \beta F(z), \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{\alpha + \beta F(z)} = x + C.$$

Ejemplo 2.10 *Resolver la EDO* $y' = y - x - 1 + \frac{1}{x-y+2}$.

Esta ecuación puede ser escrita en la forma $y' = F(\alpha x + \beta y)$ si hacemos $z = y - x$, entonces $F(z) = z - 1 + 1/(2 - z)$. Como $z' = y' - 1$ tenemos
$$z' = z - 2 - \frac{1}{z-2}, \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{(z-2)dz}{(z-2)^2 - 1} = x + C,$$
luego la solución en cuadraturas es
$$\log |(z-2)^2 - 1| = x + C, \quad \Longrightarrow \quad (z-2)^2 - 1 = Ce^x, \quad \Longrightarrow \quad z = 2 \pm \sqrt{1 + Ce^x},$$
por tanto $y = 2 + x \pm \sqrt{1 + Ce^x}$. Nótese que hemos dividido por $(z-2)^2 - 1$ por lo que podemos haber perdido soluciones. En efecto, como $(z-2)^2 - 1 = 0$ se anula en $z = 1$ y 3, podemos perder las soluciones $y = x + 1$ e $y = x + 3$.

2.4. Las EDOs homogéneas

Un tipo especial de EDOs resolubles son las denominadas EDOs homogéneas. Una función $f(x, y)$ se denomina homogénea de orden k si para todo x, y y para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$. Además, si f es homogénea de orden 0, entonces $f(tx, ty) = f(x, y)$. Sea f una función homogénea de orden 0. Sea $y = u\,x$. Entonces
$$f(x, y) = f(x, ux) = x^0 f(1, u) = g(u) = g(y/x),$$
o sea, toda función homogénea de orden 0 es una función de y/x.

Supongamos que tenemos la EDO $y' = f(x, y)$ y f es una función homogénea de orden 0, entonces la EDO anterior se transforma en la EDO
$$y' = f(y/x). \tag{2.10}$$
A la ecuación $y' = f(y/x)$ anterior se le suele denominar EDO homogénea. Si hacemos el cambio $y = ux$, entonces $y' = xu' + u$ y la EDO (2.10) se transforma el la EDO separable
$$xu' + u = f(u), \qquad u = y/x,$$
que se puede resolver en cuadraturas ya que es una EDO separable
$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \log |x| + C.$$

Ejemplo 2.11 *Resolver la EDO* $y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$.

Sea $f(x,y) = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$, es fácil comprobar que $f(tx,ty) = f(x,y)$, así que hacemos el cambio $y = u\,x$ y obtenemos, si $u \neq \pm 1$,

$$xu' = \sqrt{1-u^2}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{arc\,sen} u = \log|x| + C \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{arc\,sen}(y/x) = \log|x| + C.$$

Ahora bien, como hemos visto $u \neq \pm 1$, lo que puede hacernos perder las soluciones $y = \pm x$. Sustituyendo $y = \pm 1$ en la EDO inicial comprobamos que $y = x$ e $y = -x$ son también dos soluciones de la EDO original.

2.5. Otras EDOs de primer orden: la EDO de Clairaut

La EDO

$$y = xy' + f(y'), \qquad f \text{ derivable y con primera derivada continua} \tag{2.11}$$

se denomina EDO de Clairaut en honor a Alexis Clairaut que las estudió en 1734. Vamos a intentar encontrar alguna solución de la EDO Clairaut para lo cual derivamos (2.11)

$$y' = xy'' + y' + f'(y')y'' \quad \Longleftrightarrow \quad [x + f'(y)]y'' = 0,$$

de donde deducimos que o $y'' = 0$ o $x + f'(y') = 0$. La primera condición nos da una familia de rectas $y = mx + n$. Lo curioso de esta EDO es que la envolvente[1] de todas las rectas también es solución. Para descubrir cuales son las rectas solución basta notar que si $y' = c$, entonces la EDO nos da la ecuación $y = xc + f(c)$, $c \in \mathbb{R}$. Para encontrar la otra solución usamos que $x = -f'(y')$. Luego si hacemos $y' = t$, siendo t un parámetro real tenemos la siguiente solución paramétrica conocida comúnmente como solución *singular*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -f'(t), \\ \\ y = xt + f(t). \end{array} \right.$$

Ejemplo 2.12 *Resolver la EDO* $y = xy' + (y')^2$.

Esta es una EDO de Clairaut con $f(z) = z^2$, luego las soluciones son las familias de rectas

$$y = cx + c^2,$$

y la solución singular

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2t \\ \\ y = xt + t^2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{x}{2}, \quad y = -\frac{x^2}{4}.$$

[1]La envolvente de una familia de rectas (curvas en general) es una curva que es tangente a todas dichas rectas (curvas).

2.6. Ecuaciones exactas y factores integrantes

Sea una EDO del tipo $y' = f(x,y)$. Está claro que si la EDO anterior la podemos reescribir en la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$, para cierta función $\phi(x,y)$, entonces la solución de la EDO será $\phi(x,y) = C$.

Nuestro objetivo en este apartado es estudiar cuando una EDO se puede escribir de la forma anterior. Por conveniencia reescribiremos la EDO $y' = f(x,y)$ en la forma equivalente

$$N(x,y)y' + M(x,y) = 0. \tag{2.12}$$

La EDO (2.12) tendrá una solución en cuadraturas del tipo $\phi(x,y) = C$ si y sólo si (2.12) es equivalente a la expresión $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$, o lo que es lo mismo, $\phi(x,y) = C$ es una solución de (2.12) si y sólo si (2.12) se puede reescribir de la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$.

Como

$$0 = \frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}y',$$

entonces la EDO (2.12) se puede escribir de la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$ si y sólo si, dadas dos funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ existe una función $\phi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.13}$$

Por ejemplo, la EDO $x + yy' = 0$ se puede escribir en la forma $\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = 0$ y la EDO $2x - \exp(x+y) + [2y + \exp(x+y)]y' = 0$ se puede escribir como $\frac{d}{dx}[x^2 + y^2 - \exp(x+y)] = 0$.

En general no es trivial deducir si una EDO del tipo (2.12) se puede expresar de la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$. Por ejemplo, no es fácil intuir que la EDO

$$y^3 + ye^y\cos(xy) - \frac{3}{x^2} + [3xy^2 + e^y\operatorname{sen}(xy) + xe^y\cos(xy)]y' = 0$$

se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left[xy^3 + e^y\operatorname{sen}(xy) + \frac{3}{x}\right] = 0.$$

Obviamente no cualquier EDO del tipo (2.12) se puede escribir de la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$, por ejemplo, la EDO lineal (1.2) $y' + [a(x)y - b(x)] = 0$.

Así surge la pregunta ¿cuándo la EDO (2.12) se puede escribir de la forma $\frac{d}{dx}(\phi(x,y)) = 0$, y por tanto su solución es $\phi(x,y) = C$?. La respuesta la da el siguiente

Teorema 2.13 *Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ dos funciones tales que existan todas las derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial y}$ y sean funciones continuas en cierto dominio[2] $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Entonces, para que exista una función $\phi(x,y)$ tal que se cumpla la condición (2.13)*

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \qquad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2.14}$$

[2]Por dominio entenderemos un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y convexo, o sea, sin agujeros.

Definición 2.14 *Una EDO del tipo (2.12) se llama exacta si N y M son funciones tales que $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$.*

Corolario 2.15 *Para que la EDO (2.12) sea exacta es necesario y suficiente que se cumpla la condición (2.14) en cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Además, toda EDO exacta tiene una solución en cuadraturas en Ω, es decir existe una función $\phi(x,y)$ tal que $\phi(x,y) = C$, define la solución de (2.12) en Ω.*

Ejemplo 2.16 *Decidir si la EDO*

$$(2x + y - \operatorname{sen} x) + (3y^2 + \cos y + x)y' = 0,$$

es exacta, y encontrar su solución.

En este caso $M(x,y) = 2x+y-\operatorname{sen} x$ y $N(x,y) = 3y^2+\cos y+x$, luego $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, luego según el corolario 2.15 es exacta. Vamos a resolverla. Como la EDO es exacta entonces existe $\phi(x,y)$ tal que se cumple (2.13), o sea,

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = 2x + y - \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 3y^2 + \cos y + x.$$

De la primera deducimos

$$\phi(x,y) = x^2 + xy + \cos x + h(y).$$

Para calcular $h(y)$ usamos que $\phi(x,y) = C$, luego

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = x+h'(y) = 3y^2+\cos y+x, \quad \Longrightarrow \quad h'(y) = 3y^2+\cos y, \quad \Longrightarrow \quad h(y) = y^3+\operatorname{sen} y,$$

y la solución, en cuadraturas, es $\phi(x,y) = x^2 + xy + \cos x + y^3 + \operatorname{sen} y = C$.

Obviamente podíamos haber comenzado por la segunda ecuación $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 3y^2+\cos y+x$, entonces

$$\phi(x,y) = y^3 + \operatorname{sen} y + xy + g(x),$$

pero

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = y + g'(x) = 2x + y - \operatorname{sen} x, \quad \Longrightarrow \quad g(x) = x^2 + \cos x,$$

así $\phi(x,y) = y^3 + \operatorname{sen} y + xy + x^2 + \cos x = C$.

Ejemplo 2.17 *Comprobar si la EDO lineal (1.2) es exacta.*

En este caso $y' + [a(x)y - b(x)] = 0$, luego $M(x,y) = a(x)y - b(x)$ y $N(x,y) = 1$, luego $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, así que no es exacta. ¿Qué hacer en este caso?

Definición 2.18 *Una EDO del tipo (2.12) es inexacta (o no es exacta) si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.*

2.6.1. Factores integrantes

Definición 2.19 *En general, dada la EDO (2.12), se dice que* $\rho(x,y) \not\equiv 0$ *es un factor integrante de (2.12) si la EDO* $\rho(x,y)M(x,y) + \rho(x,y)N(x,y)y'$ *es exacta.*

Ahora bien, una EDO es exacta si y sólo si se tiene la condición (2.14), luego $\rho(x,y)$ ha de satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial \rho(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \rho(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

si y sólo si

$$M(x,y)\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} + \rho(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} + \rho(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{2.15}$$

Es decir, una ecuación *inexacta* tiene un factor integrante $\rho(x,y)$ si y sólo si $\rho(x,y)$ cumple con la condición (2.15).

Por ejemplo consideremos la EDO $x^2 \operatorname{sen} y + xe^y y' = 0$. Obviamente no es exacta. Entonces, para que admita un factor integrante $\rho(x,y)$ éste debe satisfacer la ecuación

$$x^2 \operatorname{sen} y \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} + \rho(x,y)x^2 \cos y = xe^y \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} + \rho(x,y)e^y,$$

la cual es no trivial de resolver. De hecho en la mayoría de los casos la ecuación (2.15) es más complicada de resolver que la EDO original, por tanto el uso de ésta estará restringido a aquellos casos en los que (2.15) es fácilmente resoluble. Veamos a continuación dos de ellos:

1. cuando la función ρ es una función que sólo depende de x o sea, $\rho = \rho(x)$
2. cuando la función ρ es una función que sólo depende de y, o sea, $\rho = \rho(y)$.

En el primer caso (2.15) nos da

$$\rho(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial \rho(x)}{\partial x} + \rho(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

luego

$$\frac{1}{\rho(x)}\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = R(x,y).$$

La expresión anterior es sencilla de resolver si la función $R(x,y)$ de la derecha es una función sólo de x, en cuyo caso $\rho(x) = \exp(\int R(x)dx)$.

En el segundo caso tenemos

$$M(x,y)\frac{\partial \rho(y)}{\partial y} + \rho(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \rho(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

luego

$$\frac{1}{\rho(y)}\frac{d\rho(y)}{dy} = \frac{\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = S(x,y).$$

La expresión anterior es sencilla de resolver si la función $S(x,y)$ de la derecha es una función sólo de y, en cuyo caso $\rho(y) = \exp(\int S(y)dy)$.

Ejemplo 2.20 *Resolver la EDO* $(x^2 - \operatorname{sen}^2 y) + x\operatorname{sen}(2y)y' = 0$.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2\operatorname{sen}(2y), \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)/N(x,y) = -\frac{2}{x} = \frac{\rho'}{\rho},$$

luego $\rho(x) = 1/x^2$. Multiplicando la EDO por $1/x^2$ obtenemos la EDO exacta

$$\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 y}{x^2}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}(2y)}{x}\right) y' = 0,$$

así

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 y}{x^2}, \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = x + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{x} + h(y),$$

y

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = \frac{\operatorname{sen}(2y)}{x} + h'(y) = N(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(2y)}{x}, \quad \Longrightarrow \quad h'(y) = 0, \quad \Longrightarrow \quad h(y) = C,$$

y la solución es, por tanto, $\phi(x,y) = x + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{x} = C$.

Ejemplo 2.21 *Resuelve la EDO*

$$(x^3/y + 5xy)y' + (x^2 + y^2) = 0.$$

Tenemos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{3}{y}(x^2 + y^2), \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial x}\right)/M(x,y) = \frac{3}{x} = \frac{\rho'}{\rho},$$

luego $\rho(y) = y^3$. Multiplicando la EDO por y^3 obtenemos la EDO exacta

$$(x^3y^2 + 5xy^4)y' + (x^2y^3 + y^5) = 0.$$

Usando el método descrito tenemos

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = x^2y^3 + y^5, \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + xy^5 + h(x),$$

y

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = x^3y^2 + 5xy^4 = N(x,y) = x^3y^2 + 5xy^4, \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = 0, \quad \Longrightarrow \quad h(x) = C,$$

y la solución es, por tanto, $\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + xy^5 = C$.

2.7. Aproximaciones numéricas: el método de Euler

2.7.1. El método de Euler

Como ya hemos visto son pocas las EDOs que se pueden resolver analíticamente, es por ello que se necesita de métodos fiables para obtener la solución de una EDO numéricamente. Supongamos que queremos resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d\,y(x)}{dx} = f(x,y), \qquad\qquad y(x_0) = y_0. \tag{2.16}$$

Obviamente usando un ordenador sólo podremos resolver el problema en un intervalo acotado, digamos $[x_0, x_0 + l]$. Para ello vamos a dividir el intervalo en N subintervalos $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N]$, $x_N = x_0 + l$. Supongamos que hemos encontrado los valores de y en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_N$, que denotaremos por $y_0, y_1, \ldots, y_N$. Entonces, para encontrar una solución aproximada $\widehat{y}(x)$ podemos unir los puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, N$ mediante líneas rectas (ver figura 3). Es evidente que si el valor y_i es bastante cercano al valor real $y(x_i)$ para todos los $i = 0, 1, \ldots, N$, entonces, al ser $\widehat{y}$ e y funciones continuas, la solución aproximada $\widehat{y}(x)$ estará "*muy cercana*" a la solución real $y(x)$ en cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$.

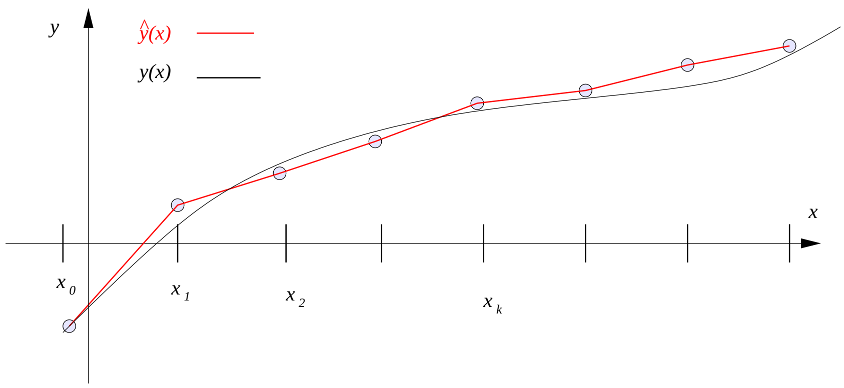


Figura 3: Construcción de un esquema numérico.

Vamos a usar por simplicidad intervalos iguales, es decir, vamos a escoger los *nodos* x_i equidistantes. Lo anterior se conoce en la teoría de métodos numéricos como una red equiespaciada o uniforme de paso $h = l/N$. Así pues tendremos las siguientes ecuaciones $x_k = x_0 + kh = x_0 + k\left(\frac{l}{N}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $x_{k+1} = x_k + h$. Obviamente la única información que tenemos para calcular los valores y_i es la EDO que satisface nuestra incógnita $y(x)$. ¿Cómo encontrar entonces los valores y_i? La idea es como sigue:

1. Usando la EDO y la condición inicial calculamos el valor de y_1 en el punto $x_1 = x_0 + h$
2. A continuación usando el valor y_1 calculamos el valor aproximado y_2 de $y(x)$ en x_2, y así sucesivamente.
3. Conocido el valor y_k encontramos el valor y_{k+1} de $y(x)$ en x_{k+1}.

Para resolver nuestro problema de encontrar en valor de $y(x_{k+1})$ conocido el valor de $y(x_k)$ usamos el teorema de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)}{2!}h^2 + \cdots. \tag{2.17}$$

Pero $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, además,

$$y''(x_k) = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|_{x=x_k} = \left.\frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right)\right|_{x=x_k} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_k,y(x_k))}$$
$$= \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_k,y(x_k))}.$$

Luego, (2.17) nos da

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y(x_k)) + f(x_k, y(x_k))\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y(x_k))\right]\frac{h^2}{2!} + \cdots.$$

La aproximación más sencilla es por tanto cuando nos quedamos en la serie anterior con el término de primer orden, o sea, cuando tenemos el esquema númerico

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \tag{2.18}$$

donde obviamente $y_0 = y(x_0)$.

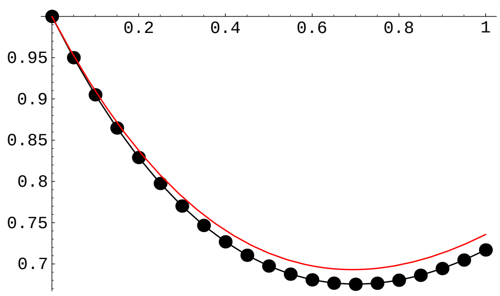
El esquema anterior se conoce por el nombre de esquema o método de Euler y constituye el método más sencillo para resolver númericamente una EDO de primer orden. Nótese que dicho esquema necesita en cada paso del valor $y(x_k)$, por tanto cuanto más cercano sea el valor y_k calculado del $y(x_k)$ real más preciso será el método. Obviamente en cada paso arrastramos el error del cáculo del paso anterior. En efecto, para calcular y_1 usamos el valor real y_0 pero cuando calculamos y_2, sustituimos el valor exacto $y(x_1)$ desconocido por su valor aproximado y_1, para calcular y_3 sustituimos el valor $y(x_2)$ por su valor aproximado y_2, y así sucesivamente.

Veamos algunos ejemplos.

Comenzaremos con una ecuación que sepamos resolver exactamente. Por ejemplo, estudiemos el problema de valores iniciales

$$y' + y = x, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

cuya solución exacta es $y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$. Escogeremos una discretización equidistante con paso $h = 1/20$ (20 subintervalos iguales). Los resultado están escritos en la tabla 1 o dibujados en la gráfica 4 (izquierda).



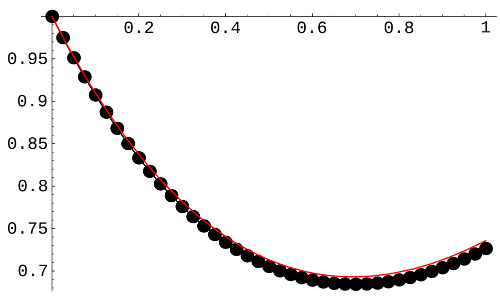


Figura 4: Solución numérica (•) y exacta (línea clara) de $y' + y = x$, $y(0) = 1$ para $N = 20$ (izquierda) y $N = 40$ (derecha)

k	x_k	$\widehat{y}(x_k)$	$y(x_k)$	$\widehat{y}(x_k) - y(x_k)$
0	0	1.	1.	0
1.	0.05	0.95	0.952459	-0.00245885
2.	0.1	0.905	0.909675	-0.00467484
3.	0.15	0.86475	0.871416	-0.00666595
4.	0.2	0.829012	0.837462	-0.00844901
5.	0.25	0.797562	0.807602	-0.0100397
6.	0.3	0.770184	0.781636	-0.0114527
7.	0.35	0.746675	0.759376	-0.0127016
8.	0.4	0.726841	0.74064	-0.0137992
9.	0.45	0.710499	0.725256	-0.0147575
10.	0.5	0.697474	0.713061	-0.0155874
11.	0.55	0.6876	0.7039	-0.0162994
12.	0.6	0.68072	0.697623	-0.0169031
13.	0.65	0.676684	0.694092	-0.0174074
14.	0.7	0.67535	0.693171	-0.0178206
15.	0.75	0.676582	0.694733	-0.0181506
16.	0.8	0.680253	0.698658	-0.0184046
17.	0.85	0.686241	0.70483	-0.0185892
18.	0.9	0.694429	0.713139	-0.0187107
19.	0.95	0.704707	0.723482	-0.0187748
20.	1.	0.716972	0.735759	-0.018787

Tabla 1: Solución númerica de la ecuación $y' + y = x$, $y(0) = 1$ con $N = 20$.

Comparemos ahora la solución númerica con la exacta (ver figura 4). Para ello primero resolvemos la ecuación exactamente $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Si hacemos un simple cambio como aumentar en número de subintervalos hasta 40 (el doble) vemos que la precisión mejora notablemente. Los resultados se pueden apreciar en la gráfica 4 (derecha).

Consideremos ahora el problema

$$y' - 1 - y^2 = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x \geq 0.$$

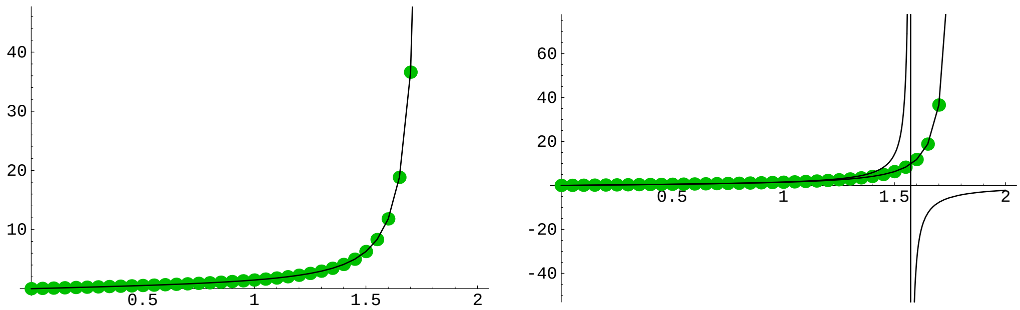


Figura 5: Soluciones numéricas de $y' - 1 - y^2 = 0$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 2]$ (izquierda) y comparación con la solución exacta (derecha).

Si usamos un esquema de 20 puntos en el intervalo $[0, 1]$ tenemos la solución representada en la gráfica 5(izquierda). Además, como la solución exacta de esa ecuación es $y(x) = \tan x$, podemos ver en la gráfica 5 derecha que prácticamente coinciden. ¿Qué ocurre si aumentamos el intervalo hasta llegar a $x = 2$?.

Si repetimos los cálculos con 40 puntos (para que el h sea el mismo) pero tomando $l = 2$ obtenemos los resultados que están representados en la gráfica 5 (derecha).

La principal razón de la divergencia consiste en que la solución $\tan x$ no está definida en $x = \pi/2$. Una pregunta natural es, por tanto, ¿cómo decidir a priori si el método de Euler nos está dando la soución correcta? y ¿en qué intervalo podemos asegurar que $\widehat{y}$ es una buena aproximación de y? Eso nos conduce una vez más a preguntarnos condiciones suficientes que nos garanticen la existencia y unicidad de las soluciones de una EDO.

2.7.2. El método de Euler mejorado

El método de Euler es el más sencillo pero tiene un problema, es un método de orden uno, o sea, es *"poco preciso"*. ¿Cómo mejorarlo?

Una posibilidad es truncar la serie de Taylor (2.17) en el tercer orden, de forma que tengamos

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + f(x_k, y_k)\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)\right]\frac{h^2}{2}, \qquad y_0 = y(x_0).$$

La ecuación anterior se conoce como el método de la serie de Taylor de tres términos y aunque es más preciso que el de Euler (se puede probar que es un método de orden 2), es algo incómodo sobre todo si f es una función algo "complicada". Por ello se suele usar una modificación del mismo.

Para ello escribamos la EDO original $y' = f(x, y)$ en el intervalo $x_k, x_k + h$ en su forma integral

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx. \tag{2.19}$$

Para resolver este problema aproximamos la integral mediante un rectángulo de altura $f(x_k, y_k)$ (ver figura 6 izquierda)

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx \approx hf(x_k, y_k),$$

lo que nos conduce nuevamente al esquema de euler (2.18)

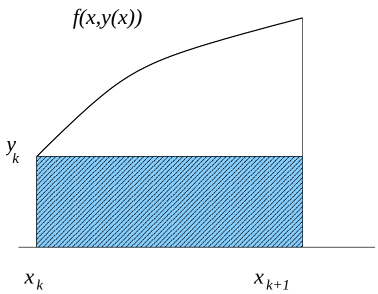


Figura 6: Regla del rectángulo (izquierda) y del trapecio (derecha) para aproximar una integral

Esta aproximación es muy burda. Una mejor aproximación es usar la regla de los trapecios (ver figura 6 derecha) para aproximar la integral, es decir

$$\int_{x_k}^{x_k+h} f(x, y(x))dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right],$$

de donde se deduce el esquema *implícito*

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \quad y_0 = y(x_0).$$

Obviamente este esquema es muy incómodo pues hay que resolver la ecuación implícita para hallar y_{k+1}. Una forma de obviar esta dificultad es usar la predicción que da el método de Euler $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, de esta forma obtenemos el *método de Euler mejorado*

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \quad y_0 = y(x_0). \tag{2.20}$$

Veamos algunos ejemplos.

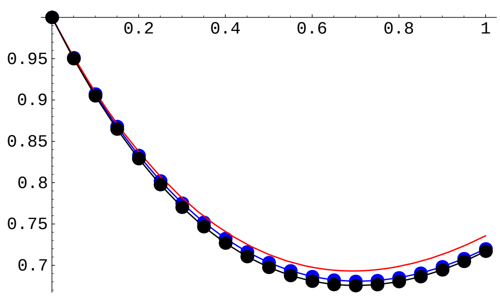
Comenzaremos con la misma primera ecuación de antes

$$y' + y = x, \qquad y(0) = 1, \quad x \in [0,1],$$

cuya solución exacta es $y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$. Escogeremos una discretización equidistante con paso $h = 1/20$ (20 subintervalos iguales). Los resultados los vemos en la gráfica 7 izquierda)

k	x_k	$\widehat{y}(x_k)$	$y(x_k)$	$\widehat{y}(x_k) - y(x_k)$
0	0	1.	1.	0
1.	0.05	0.95125	0.952459	-0.00120885
2.	0.1	0.907314	0.909675	-0.00236077
3.	0.15	0.867958	0.871416	-0.00345845
4.	0.2	0.832957	0.837462	-0.00450443
5.	0.25	0.8021	0.807602	-0.00550115
6.	0.3	0.775186	0.781636	-0.00645092
7.	0.35	0.75202	0.759376	-0.00735595
8.	0.4	0.732422	0.74064	-0.00821835
9.	0.45	0.716216	0.725256	-0.00904012
10.	0.5	0.703238	0.713061	-0.00982318
11.	0.55	0.69333	0.7039	-0.0105693
12.	0.6	0.686343	0.697623	-0.0112803
13.	0.65	0.682134	0.694092	-0.0119578
14.	0.7	0.680567	0.693171	-0.0126034
15.	0.75	0.681515	0.694733	-0.0132186
16.	0.8	0.684853	0.698658	-0.0138047
17.	0.85	0.690467	0.70483	-0.0143632
18.	0.9	0.698244	0.713139	-0.0148955
19.	0.95	0.708079	0.723482	-0.0154026
20.	1.	0.719873	0.735759	-0.0158858

Tabla 2: Solución númerica de la ecuación $y' + y = x$, $y(0) = 1$ con $N = 20$ usando el método de Euler mejorado.



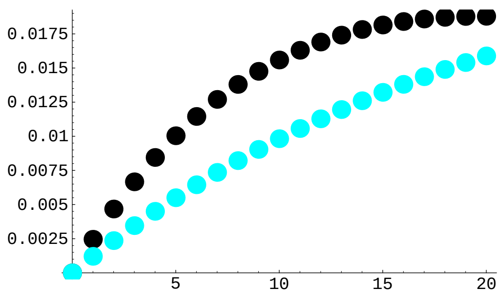


Figura 7: Comparación gráfica de la solución numérica y exacta de $y' + y = x$, $y(0) = 1$ para $N = 20$ (izquierda) usando los métodos de Euler y Euler mejorado. A la derecha vemos la comparación de los errores del del método de Euler (círculos obscuros) con los del método de Euler mejorado (círculos claros)

2.8. Problemas

Problemas de EDOs de Bernoulli y Riccati

Problema 2.22 *Resolver las EDOs de Bernoulli*

1. $y' + y = xy^3$,
2. $xy' + y = y^2 \log x$,
3. $y' + 2y = e^x y^2$,
4. $4y^3 y' + 4xy^4 = 4x$,
5. $(1 - x^3)y' - 2(1 + x)y = y^{5/2}$,
6. $xy' - y = x^k y^n$, $\quad n \neq 1$, $n + k \neq n$,
7. $x^3 \operatorname{sen} y y' + 2y = x$ *(resolverla respecto a* x *y no a* y*, para ello usar que* $y'(x) = dy/dx = 1/(dx/dy) = 1/x'(y)$*).*

Problema 2.23 *Resolver las EDOs de Riccati*

1. $y' = x^3 + 2y/x - y^2/x$, $y_p = -x^2$,
2. $y' = 1 + y/x + (y/x)^2$, $y_p = x$,
3. $3y' + y^2 + 2/x^2 = 0$,
4. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$,
5. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

Problemas de EDOs reducibles a EDOs lineales o separables

Problema 2.24 *Supongamos que tenemos la EDO* $y' = f(y/x)$*. Prueba que esta ecuación es equivalente a la EDO separable*

$$xv' + v = f(v), \qquad v = y/x.$$

A la ecuación $y' = f(y/x)$ *se le suele denominar EDO homogénea. Resuelve las siguientes EDOs*

1. $y' = 2(y/x) + (y/x)^2$
2. $(x - \sqrt{x\,y})y' = y$
3. $y' = y/x + \tan(y/x)$,
4. $(x + y + 2)y' = 3x - y - 6$,
5. $(4x - 3y - 6)y' + x - 2y + 1 = 0$,
6. $(2x + 4y + 3)y' + 2 + 2y + 3 = 0$.
7. $y' = (ax + by)/(cx + ey)$. *Considerar los casos* $ae \neq cb$ *y* $ab = cd$*. Como caso particular resolver la EDO* $y' = (x + y)/(x - y)$*.*

8. *Resolver la EDO* $y' = (ax + by + m)/(cx + ey + n)$*. Para ello prueba que existe un cambio de variable* $y = Ay + B$ *y* $x = Cx + D$ *que transforma la EDO en la EDO del apartado anterior* $y' = (ax + by)/(cx + ey)$*. Como caso particular resolver la EDO* $y' = (x + y + 1)/(x - y + 2)$*.*

Problema 2.25 *Resolver las EDOs del tipo* $y' = F(ax + by)$

1. $y' = \sqrt{x + y} - 1$,
2. $y' = (x - y + 5)^2$,
3. $y' = 2(y - x) + (y - x)^2$,
4. $y' = \operatorname{sen}(x - y)$.

Problema 2.26 *Haciendo un cambio de variables o derivando transforma las siguientes EDOs en EDOs lineales y resuélvelas.*

1. $(x^2 - 2y + 1)y' = x$,
2. $x(e^y - y') = 2$,
3. $y(x) = x + 1 + \displaystyle\int_0^x y(t)dt$,
4. $\displaystyle\int_0^x (x - t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$.

Problemas de EDOs exactas y factores integrantes

Problema 2.27 *Decide si las siguientes ecuaciones ecuaciones son exactas y resuélvelas. En caso de que no lo sean, encuentra, a ser posible, un factor integrante.*

1. $(3y^2 + 2xy + 2x) + (6xy + x^2 + 3)y' = 0$,
2. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) - \sqrt{x^2 - y}y' = 0$,
3. $(x^2 + y^2 - a)x + (y^2 + x^2 + a)yy' = 0$,
4. $2xy + (x^2 - y^2)y' = 0$,
5. $e^{-y} - (2y + xe^{-y})y' = 0$,
6. $y/x + (y^3 + \log x)y' = 0$,
7. $3x^2(1 + \log y) - (2y - x^3/y)y' = 0$,
8. $(x^2 + y^2 + x) + yy' = 0$,

Problema 2.28 *Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales*

1. $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$, $y(1) = 1$,
2. $3x^2 + 4xy + 2(y + x^2)y' = 0$, $y(0) = 1$,
3. $3xt + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$, $y(2) = 1$,
4. $xy' - y - y^2 = 0$, $y(2) = 1$,

Problemas de EDOs de Clairaut

Problema 2.29 *Resolver las EDOs de Clairaut*

1. $(y')^2 + x^3y' - 2x^2y = 0$,
2. $y = xy' + (y')^n$, $n \neq 0, 1$,
3. $y = xy' + \log(y')$,
4. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$,
5. $y = xy' - e^{y'}$.

Problemas del método de Euler

Problema 2.30 *Encuentra las soluciones $y(x)$ de los siguientes problemas de valores iniciales usando el método de Euler y el de Euler mejorado.*

1. $y' = e^{x^2}y$, $y(2) = 1$,
2. $y' = e^{x^2}y^{-2}$, $y(0) = 1$,
3. $y' = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$,
4. $y' = k(a - y)(b - y)$, $a, b, k > 0$, $y(0) = 0$, *(toma distintos valores de a, b y k,*
5. $z' - 2xz = 2$, $z(0) = 1$,
6. $y' + \operatorname{sen}(x)y - \cos(x)y^3 = 1 + x^2$, $y(0) = 1$,
7. $y' + 2e^y = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

3. Sistemas de EDOs

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (SEDO) es un sistema de la forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde y_1,... y_n son funciones de x desconocidas y f_1, ... f_n son ciertas funciones conocidas. Por comodidad vamos a usar la forma vectorial del sistema anterior, o sea, vamos a denotar por Y, Y' y F son los vectores

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

es decir la derivada de un vector Y la definiremos como el vector que tiene como componentes las derivadas de cada una de las componentes del vector original. Usando lo anterior podemos reescribir (3.1) en la forma vectorial

$$\frac{d}{dx} Y(x) = Y'(x) = F(x, Y). \tag{3.2}$$

Evidentemente que el caso $n = 1$ recuperamos las EDOs de primer orden estudiadas en el capítulo anterior. Está claro que si el estudio de una EDO de primer orden era "bastante" complicado, un sistema de éstas es mucho más complejo, así que nos restringiremos al estudio de los SEDOs lineales, es decir cuando f_k, $k = 1, \dots, n$ es una función lineal de la forma

$$f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) y_j(x) + b_k(x), \qquad k = 1, \dots, n,$$

lo que nos conduce a los sistemas lineales

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x). \end{cases}, \tag{3.3}$$

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x), \tag{3.4}$$

donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1(x)} & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

Cuando $B(x) = 0$, o sea cuando todas las componentes del vector B son cero, diremos que SEDO es homogéneo, y si al menos una componente de B es no nula, no homogéneo.

3.1. La ecuación lineal $Y' = A(x)Y + B(x)$

Comenzaremos enunciando un teorema que demostraremos al final de este capítulo.

Teorema 3.1 *Sean $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B(x) \in \mathbb{R}^n$ una matriz un un vector cuyos elementos son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Entonces el PVI, $Y' = A(x)Y + B(x)$, $Y(x_0) = Y_0$ tiene una única solución cualquiera sean las condiciones iniciales Y_0 escogidas.*

Comenzaremos estudiando el sistema homógeneo, o sea cuando $B(x) = 0$

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \qquad A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ y continua en } \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Teorema 3.2 *Sea $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si Y_1 e Y_2 son soluciones del sistema $Y' = A(x)Y$, entonces cualquiera de sus combinaciones lineales son también solución.*

Teorema 3.3 *Sean $Y_1(x)$, ..., $Y_k(x)$ soluciones del sistema $Y' = A(x)Y$. Para que los vectores (funciones) $Y_1(x)$, ..., $Y_k(x)$ sean linealmente dependientes para todo $x \in \mathbb{R}$ es necesario y suficiente que lo sean para algún $t \in \mathbb{R}$.*

Corolario 3.4 *Para que las soluciones $Y_1(x)$, ..., $Y_k(x)$ del PVI, $Y' = A(x)Y$, $Y_i(x_0) = Y_{0,i}$, $i = 1, \ldots, k$ sean linealmente independientes es suficiente que las condiciones iniciales, o sea los vectores, $Y_{0,1}$, $\ldots Y_{0,k}$ sean linealmente independientes.*

El corolario anterior se puede parafrasear de la siguiente forma: *conjuntos de condiciones linealmente independientes generan soluciones linealmente independientes y conjuntos de condiciones linealmente dependientes generan soluciones linealmente dependientes.*

Nota 3.5 *Es importante destacar que el resultado que hemos probado en relación con la dependencia lineal sólo es cierto para vectores solución de un SEDO lineal lo cual queda de manifiesto en el siguiente ejemplo. Los vectores (funciones)*

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

son vectores linealmente independientes (lo son los polinomios x y x^2) ya que es imposible obtener una de otro al multiplicar por constantes, no obstante, para $x = x_0$, obviamente son dependientes pues

$$\begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.6 *Sea $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo $Y' = A(x)Y$ es un espacio vectorial de dimensión n.*

Corolario 3.7 *Si $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes del sistema $Y' = A(x)Y$, entonces toda solución de $Y' = A(x)Y$ se puede expresar como una única combinación lineal de dichas soluciones. O sea, existen unos únicos coeficientes c_1, $\ldots c_n$ tales que*

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \cdots + c_kY_n(x).$$

En particular, la solución del PVI, $Y' = A(x)Y$, $Y(x_0) = Y_0$ se expresa de manera única como una combinación lineal de las soluciones del sistema homogéneo correspondiente.

Nota 3.8 *Juntando los teoremas 3.3 y 3.6 tenemos un criterio para encontrar una base del espacio S de todas las soluciones de $Y' = AY$: Para que las soluciones $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ del sistema $Y' = A(x)Y$ sean linealmente dependientes para todo $x \in \mathbb{R}$ es necesario y suficiente que para algún $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$\det |Y_1(x_0)\, Y_2(x_0)\, \ldots\, Y_n(x_0)| \neq 0.$$

Nota 3.9 *Todos estos resultados son ciertos para toda matriz A cuyos elementos son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.*

3.2. Los SEDO lineales con coeficientes constantes

En adelante asumiremos que A es una matriz $n \times n$ real de coeficientes constantes, es decir estudiaremos el problema (3.5) cuando la matriz A es de coeficientes constantes

$$Y'(x) = AY(x), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{3.6}$$

3.2.1. Autovalores simples

Busquemos la solución de (3.6) en la forma

$$Y(x) = e^{\lambda x} v, \tag{3.7}$$

donde λ es cierta constante y v un vector constante. Sustituyendo (3.7) en (3.6) tenemos, como v es constante[3]

$$Y'(x) = (e^{\lambda x} v) = \lambda e^{\lambda x} v \quad \Longrightarrow \quad \lambda e^{\lambda x} v = A\, e^{\lambda x} v.$$

Es decir, (3.7) es solución del sistema homogéneo si y sólo si λ es un autovalor de A y v su autovector asociado, por tanto para resolver nuestro sistema lineal basta encontrar n autovectores $v_1, \ldots, v_n$ linealmente independientes en cuyo caso la solución general es, según el teorema 3.3, de la forma

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k} v_k, \tag{3.8}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias y λ_k, $k = 1, \ldots, n$, son los autovalores asociados a los autovectores v_k, $k = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 3.10 *Encontrar la solución general del SEDO*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Comenzamos calculando los autovalores y autovectores

$$\det(A - \lambda I) = -35 - 2\,\lambda + \lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 7.$$

Calculamos los autovectores. Comenzamos con el correspondiente a $\lambda_1 = -5$

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2x_2, \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 7$

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2x_2, \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la solución general es

$$Y(x) = c_1\, e^{-5x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{7x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[3]Entenderemos que la derivada de un vector o una matriz es la derivada término a término.

Ejemplo 3.11 *Encontrar la solución general del SEDO*

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y.$$

Calculamos los autovalores y autovectores

$$\det(A - \lambda I) = 2 + 2\,\lambda + \lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -1 - i, \quad \lambda_2 = -1 + i.$$

Es decir, son complejos. ¿Qué hace en este caso?

Si A es real y λ es el autovalor complejo asociado al autovector v, entonces el complejo conjugado $\overline{\lambda}$ es el autovalor asociado al autovector $\overline{v}$. Ahora bien, si tenemos

$$Y(x) = e^{\lambda x} v = \Re Y(x) + i \Im Y(x),$$

Y será solución de $Y' = AY$ si y sólo si $Y_1(x) = \Re Y(x)$ y $Y_2(x) = \Im Y(x)$ son solución de $Y' = AY$, entonces

$$\Re Y(x) = e^{ax}(\Re v \cos bx - \Im v \operatorname{sen} bx), \quad \Im Y(x) = e^{ax}(\Re v \operatorname{sen} bx + \Im v \cos bx)$$

son soluciones linealmente independientes de $Y' = AY$.

Así pues, en nuestro ejemplo

$$\lambda_1 = -1 - i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 + i \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$Y_1(x) = e^{-x}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} x\right], \quad Y_2(x) = e^{-x}\left[-\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \operatorname{sen} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos x\right],$$

por tanto

$$Y(x) = c_1 e^{-x}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} x\right] + c_2 e^{-x}\left[-\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \operatorname{sen} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos x\right].$$

3.3. La exponencial matricial $\exp(xA)$

Sea A una matriz $n \times n$ y $x \in \mathbb{R}$. Definiremos la función $\exp(xA)$ mediante la serie formal

$$\exp(xA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = I_n + xA + \frac{x^2 A^2}{2} + \cdots + \frac{x^n A^n}{n!} + \cdots, \tag{3.9}$$

donde la convergencia la entenderemos elemento a elemento. La serie anterior converge para todo $x \in \mathbb{R}$ quienquiera sea la matriz A (de hecho converge en todo $\mathbb{C}$).

Proposición 3.12 *La función* $\exp(xA)$ *satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para toda matriz A,* $\exp(0A) = I_n$ *y para todo $x \in \mathbb{R}$* $\exp(xO_n) = I_n$*, donde O_n es la matriz nula.*
2. *Para toda matriz A,* $\frac{d}{dx}\exp(xA) = A\exp(xA) = \exp(xA)A$.
3. *Para todos $x, t \in \mathbb{R}$ y toda matriz A,* $\exp[(x + t)A] = \exp(xA)\exp(tA)$.
4. *Para toda matriz A, la inversa* $[\exp(xA)]^{-1} = \exp(-xA)$.
5. *Para todas las matrices A, B con $AB = BA$,* $\exp[x(A + B)] = \exp(xA)\exp(xB)$.

6. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xI_n) = e^x I_n$.*

Dado cualquier vector *constante* $v \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\frac{d}{dx}[\exp(xA)v] = A[\exp(xA)v],$$

por tanto $\exp(xA)v$ es solución de la ecuación homogénea $Y' = AY$ y $Y(0) = v$. Si escogemos v sucesivamente como e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ obtenemos n soluciones $v_1, \ldots, v_n$ del PVI, $Y' = AY$, $Y(0) = e_i$ que además son linealmente independientes por el teorema 3.3 y por tanto constituyen una base del espacio de soluciones del sistema homogéneo correspondiente.

Definición 3.13 *Una matriz $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz fundamental del sistema $Y' = AY$ si sus n columnas son un conjunto linealmente independiente de soluciones de $Y' = AY$.*

De esta definición y de lo anterior deducimos entonces que $\exp(xA)$ es una matriz fundamental del sistema $Y' = AY$. En efecto, como hemos visto, las columnas de $\exp(xA)$ son solución de los PVI, $Y' = AY$ con $Y_i(0) = e_i$, siendo $(e_i)_i$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.14 *(de existencia y unicidad de la solución del SEDO homogéneo)*
El sistema homogéneo $Y' = AY$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siempre tiene n soluciones linealmente independientes, y por tanto el PVI, $Y' = AY$, $Y(x_0) = Y_0$ siempre tiene una única solución cualquiera sea $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ y es de la forma $Y(x) = \exp[(x - x_0)A]Y_0$.

Así pues, para encontrar la solución general del sistema $Y' = AY$ basta saber calcular la exponencial de xA. Comencemos por el caso más sencillo cuando la matriz es diagonalizable. En este caso existe una matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, siendo D una matriz diagonal. Entonces como para todo $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ tenemos

$$\exp(xA) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} PD^kP^{-1}\frac{x^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} D^k \frac{x^k}{k!}\right)P^{-1} = P[\exp(xD)]P^{-1},$$

pero, como

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \exp(xD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{x\lambda_n} \end{pmatrix},$$

de donde se deducen nuevamente las soluciones del sistema. Nótese que el caso de n autovalores distintos se puede resolver por este método.

Como ejemplo calculemos la matriz exponencial de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ante todo tenemos que el polinomio característico de A es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 3\,\lambda + \lambda^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4.$$

Calculamos los autovectores. Para $\lambda_1 = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3x_2, \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, para $\lambda_2 = 4$ obtenemos $v_2 = (-2, 1)^T$, luego

$$\exp(xD) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{4\,x} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

Luego

$$\exp(xA) = P\exp(xD)P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\,e^x} + \frac{2\,e^{4\,x}}{5} & \frac{6}{5\,e^x} - \frac{6\,e^{4\,x}}{5} \\ \frac{1}{5\,e^x} - \frac{e^{4\,x}}{5} & \frac{2}{5\,e^x} + \frac{3\,e^{4\,x}}{5} \end{pmatrix}.$$

3.4. El caso de autovalores múltiples

Vamos a explotar las propiedades de la matriz exponencial. Usando la propiedad 5 de $\exp(xA)$ tenemos

$$\exp(xA)v = \exp[(A - \lambda I_n)x]\exp(\lambda I x)v,$$

pero

$$\exp(\lambda I x)v = e^{\lambda x} v \quad \Longrightarrow \quad \exp(xA)v = e^{\lambda x}\exp[(A - \lambda I_n)x]v.$$

Es decir,

$$\exp(xA)v = e^{\lambda x}\left(v + x(A - \lambda I_n)v + \frac{x^2}{2}(A - \lambda I_n)^2 v + \ldots + \frac{x^k}{k!}(A - \lambda I_n)^k v + \ldots \right).$$

En el caso de un autovalor simple tenemos obviamente $(A - \lambda I_n)v = 0$ si v es el correspondiente autovector, luego $\exp(xA)v = e^{\lambda x} v$ que es lo mismo que teníamos antes. Si tenemos entonces n autovectores $v_1, \ldots v_n$ linealmente independiente entonces encontramos n soluciones linealmente independientes $Y_i = e^{\lambda_k x} v_k$, $k = 1, \ldots, n$.

¿Qué hacer cuando hay una raíz múltiple, o más exactamente si la matriz A no es diagonalizable?

Supongamos, por ejemplo, que el autovalor λ es doble y que tiene asociado un único autovector (el autoespacio asociado es de dimensión 1). Una solución es por tanto $e^{\lambda x} v_1$, donde v_1 es el autovector asociado a λ. El otro vector v_2 que necesitaremos lo buscaremos de forma que $(A - \lambda I_n)v_2 \neq 0$ pero $(A - \lambda I_n)^2 v_2 = 0$. Entonces otra solución, independiente de la anterior es

$$\begin{aligned} \exp(xA)v_2 = \; & e^{\lambda x}\Big(v_2 + x(A - \lambda I_n)v_2 + \frac{x^2}{2}\underbrace{(A - \lambda I_n)^2 v_2}_{=0} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\underbrace{(A - \lambda I_n)^k v}_{=0} + \ldots \Big) \\ = \; & e^{\lambda x} v + e^{\lambda x} x(A - \lambda I_n)v_2. \end{aligned}$$

En el caso que la multiplicidad de λ sea de orden mayor seguimos el siguiente procedimiento para resolver el sistema homogéneo

1.) Calculamos todos los autovalores λ_i y los correspondientes autovectores v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ y formamos k soluciones linealmente independientes de nuestro sistema $Y_i(x) = e^{\lambda_i x} v_i$, $i = 1, \ldots, k$. Si $k = n$ entonces las $Y_i(x)$ generan a todo el espacio solución.

2.) Si $k < n$ entonces hay autovalores múltiples. Sea λ uno de tales autovalores y sea m_a la multiplicidad algebraica de dicho autovalor y m_g la multiplicidad geométrica (o sea la dimensión de autoespacio asociado a λ). Si $m_a = m_g$ entonces los vectores $Y_i(x) = e^{\lambda_i x} v_i$ $i = 1, \ldots, a_a$ generan todo el subespacio correspondiente a λ. Supongamos que $m_a > m_g$, entonces para completar el espacio solución asociado al autovalor λ (nos falta encontrar $m_a - m_g$ soluciones linealmente independientes) buscamos los vectores $v_1, \ldots, v_l$ ($l \leq m_a - m_g$) tales que $(A - \lambda I_n)v \neq 0$ pero que $(A - \lambda I_n)^2 v = 0$, luego los los vectores v tales que $(A - \lambda I_n)v \neq 0$ y $(A - \lambda I_n)^2 v \neq 0$, y $(A - \lambda I_n)^3 v = 0$, y así sucesivamente hasta completar el subespacio. Y así con cada uno de los autovalores múltiples.

Veamos un ejemplo:

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Obviamente los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_1 = 1$ siendo éste último de multiplicidad 2. Además, los autovectores correspondientes son $v_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ y $v_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, respectivamente. Luego tenemos **dos** soluciones independientes

$$Y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(x) = e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y necesitamos una tercera solución. Aplicando el método antes descrito buscamos un tercer vector v_3 que no sea autovector de A asociado a $\lambda_2 = 1$ y tal que $(A - I_3)^2 v = 0$, es decir

$$(A - I)^2 v = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R},$$

o sea

$$v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pero como $(A - I)v_3 = (\beta, 0, 0)^T \neq 0$, deducimos que $\beta \neq 0$, luego tomando[4] $\beta = 1$, $\alpha = 0$ obtenemos la tercera solución que buscabamos

$$Y_3(x) = e^x \exp(A - I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^x \left[I_3 + x(A - I_3) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así pues

$$Y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El método anterior nos indica un procedimiento general para resolver el SEDO (3.6) en general conocido como método de Euler que consiste en lo siguiente:

1. Calculamos los autovalores λ_k de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ del sistema $Y' = AY$ y sea m_k la multiplicidad algebraica del autovalor.

2. Para cada autovalor, buscamos la solución del correspondiente subespacio (o sea, la solución "generada" por el autovalor) en la forma

$$Y_k(x) = e^{\lambda_k x} \sum_{j=0}^{m_k - 1} A_j x^j, \qquad A_j \in \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

[4]Cualquier elección de α y β es posible siempre que $\beta \neq 0$.

donde puede ocurrir que alguno de los vectores A_j, $j = 0, 1, \dots, m_k - 1$ sean nulos.

Veamos como funciona este método en el ejemplo anterior.

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Tenemos que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_1 = 1$ siendo éste último de multiplicidad 2. Para el primero tenemos al igual que antes $Y_1(x) = e^{2x}(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ y para el segundo buscamos las soluciones en la forma

$$Y_2(x) = e^x \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} x \right].$$

Sustituyendo en el sistema tenemos

$$Y_2'(x) = e^x \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + (a_4 + a_5)x \\ a_2 + a_5 x \\ 2a_3 + 2a_6 x \end{pmatrix}.$$

Igualando componentes tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_4 & = & a_2 + a_5 \\ a_5 & = & 0 \\ a_6 & = & a_3 + a_6 x \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad a_3 = a_5 = a_6 = 0,\ a_4 = a_2,$$

con a_1 y a_2 cualesquiera, es decir,

$$Y_2(x) = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \right] e^x = e^x \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x \right],$$

que coincide con la solución encontrada por el método anterior.

3.4.1. La matriz fundamental de soluciones y la matriz $\exp(xA)$

Sea $V(x)$ una matriz fundamental, entonces si definimos el vector $c = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$, la solución general de $Y' = AY$ se puede escribir de la forma $Y(x) = V(x)c$. Sea ahora el PVI, $Y' = AY$ con $Y(x_0) = Y_0$, entonces tenemos $Y(x_0) = Y_0 = V(x_0)c$, luego $c = V^{-1}(x_0)Y_0$, por tanto la solución es

$$Y(x) = V(x)V^{-1}(x_0)Y_0. \tag{3.11}$$

Lo anterior nos permite encontrar una expresión para la matriz exponencial conocida una matriz fundamental. En efecto, usando que la matriz $\exp(xA)$ es la solución del sistema matricial $V' = AV$ con las condiciones iniciales $V(0) = I_n$ deducimos,

$$\exp(xA) = V(x)V^{-1}(0)I = V(x)V^{-1}(0). \tag{3.12}$$

Ejemplo 3.15 *Calcular* $\exp(xA)$ *para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *del ejemplo 3.10.*

Los autovalores y autovectores son $\lambda_1 = -5$, $v_1 = (-2,1)^T$ y $\lambda_2 = 7$ y $v_2 = (2,1)^T$ y por tanto una matriz fundamental es

$$V(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-5x} & 2e^{7x} \\ e^{-5x} & e^{7x} \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{aligned} \exp(xA) = \;& V(x)V^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -2e^{-5x} & 2e^{7x} \\ e^{-5x} & e^{7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{-5x} & 2e^{7x} \\ e^{-5x} & e^{7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ = \;& \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{7x} & -e^{-5x} + e^{7x} \\ -\frac{1}{4}e^{-5x} + \frac{1}{4}e^{7x} & \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{7x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.5. El SEDO lineales no homogéneo

Pasemos a estudiar el sistema no homogéneo

$$Y'(x) = AY(x) + F(x). \tag{3.13}$$

Para resolverlo usaremos la linealidad.

Proposición 3.16 *La solución general del SEDO (3.13) es de la forma $Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x)$, donde Y_h es la solución general del SEDO homogéneo $Y' = AY$ y Y_p es cualquier solución particular de (3.13), es decir $Y_p'(x) = AY_p(x) + F(x)$. En particular, si $V(x)$ es una matriz fundamental $Y(x) = V(x)C + Y_p(x)$, donde $C \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.17 *La solución del problema de valores iniciales $Y'(x) = AY(x) + F(x)$, $Y(x_0) = Y_0$, cualquiera sea $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe y es única y se expresa mediante la fórmula*

$$Y(x) = \exp[(x - x_0)A]Y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp[(x-t)A]F(t)dt. \tag{3.14}$$

Ejemplo 3.18 *Resolver el siguiente sistema lineal de EDOs*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso la matriz exponencial es la matriz del ejemplo 3.15, luego aplicamos (3.14). Comenzamos por

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp[(x-t)A]F(t)dt = \;& \int_0^x \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{5(x-t)} + \frac{1}{2}e^{7(x-t)} & -e^{-5(x-t)} + e^{7(x-t)} \\ -\frac{1}{4}e^{5(x-t)} + \frac{1}{4}e^{7(x-t)} & \frac{1}{2}e^{5(x-t)} + \frac{1}{2}e^{7(x-t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} dt = \\ = \;& \int_0^x \begin{pmatrix} -e^{6t-5x} + e^{-6t+7x} \\ \frac{1}{2}e^{6t-5x} + \frac{1}{2}e^{-6t+7x} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{6}e^{-5x}(1 + e^{12x}) \\ \frac{1}{12}e^{-5x}(e^{12x} - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\exp[(x-x_0)A]Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{7x} & -e^{-5x} + e^{7x} \\ -\frac{1}{4}e^{-5x} + \frac{1}{4}e^{7x} & \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-5x} + e^{7x} \\ \frac{1}{2}e^{-5x} + \frac{1}{2}e^{7x} \end{pmatrix},$$

luego la solución del PVI es

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}e^{-5x} - \frac{1}{3}e^x + \frac{7}{6}e^{7x} \\ \frac{5}{12}e^{-5x} + \frac{7}{12}e^{7x}. \end{pmatrix}.$$

3.6. Problemas

Problema 3.19 *Encuentra la solución general del sistema homógeneo $Y'(x) = AY(x)$ y, en su caso, del problema de valores iniciales en los siguientes casos:*

1. a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,

2. a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Problema 3.20 *Prueba las siguientes propiedades de la matriz e^{xA} con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:*

1. $e^{0A} = I_n$, I_n *es la matriz identidad* $n \times n$.
2. $\frac{d}{dx} e^{xA} = Ae^{xA}$.
3. $e^{(x+t)A} = e^{xA} e^{tA}$, $\forall x, t \in \mathbb{R}$.
4. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, e^{xA} *es invertible y su inversa* $(e^{xA})^{-1} = e^{-xA}$.
5. *Si* A *y* B *conmutan, o sea* $AB = BA$, *entonces* $e^{x(A+B)} = e^{xA}e^{xB} = e^{xB}e^{xA}$.
6. $e^{xI} = e^x I$.

Problema 3.21 *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Prueba que* $A^{2n+1} = A$, $A^{2n} = I_2$, $B^{2n+1} = (-1)^n B$, *y* $B^{2n} = (-1)^n I_2$.
2. *Usando lo anterior calcula las matrices* e^{xA} *y* e^{xB}.
3. *Como aplicación calcula* e^{xC} *con* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Problema 3.22 *Usando las propiedades de la matriz e^{xA} con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ encuentra la solución de los SEDO del ejercicio (3.19).*

Problema 3.23 *Resuelve los sistemas homógeneos*

1. a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$

2. $Y' = AY$, *con* a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Problema 3.24 *Encuentra una matriz fundamental de soluciones de los sistemas $Y' = AY$, cuya matriz de coeficientes es*

1. *a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, *c)* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$,

2. *a)* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, *c)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 3.25 *Encuentra la solución general del sistema de EDOs no homogéneo* $Y'(x) = AY + B(x)$ *y, en su caso, la correspondiente solución del problema de valores iniciales cuando*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

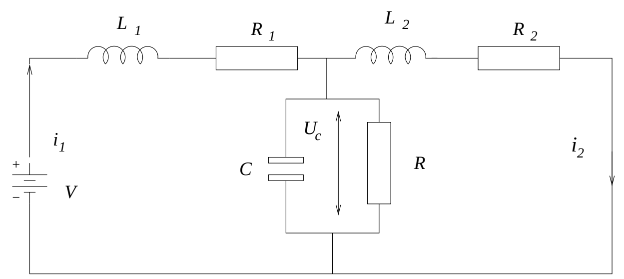
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos(2x) \end{pmatrix}$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema 3.26 *Resuelve los sistemas lineales*

1. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 7xe^{-x} - 3 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - 1 \end{cases}$, *sabiendo que su solución es acotada si* $x \to +\infty$.

2. $\begin{cases} x' = v \\ v' = -\omega^2 x - 2\beta v + f(t) \end{cases}$, *con* $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$, $\beta < \omega$. *Este sistema modeliza el movimiento de un péndulo con rozamiento y una fuerza externa* f.

3. *Se considera el siguiente circuito eléctrico*



Las intensidades i_1, i_2 *y las tensiones* U_c *y* V *satisfacen el siguiente sistema diferencial*

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \\ U_c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -20 \\ 0 & -10 & 20 \\ 50 & -50 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ U_c \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide determinar i_1, i_2, U_c *en los siguientes casos:*

(a) $V(t) = 0$, $i_1(0) = i_2(0) = 0$, $U_c(0) = 10$.

(b) $V(t) = 10$, $i_1(0) = i_2(0) = 0 = U_c(0) = 0$.

Problema 3.27 *Demuestra que si la matriz* $A(x)$ *es tal que*

$$A(x) \cdot \int_0^x A(t)dt = \int_0^x A(t)dt \cdot A(x),$$

entonces, la solución del SEDO $Y' = A(x)Y$, $Y(0) = Y_0$ *se puede expresar mediante la expresión* $Y(x) = \exp(\int_0^x A(t)dt)Y_0$. *Como aplicación calcula la solución general del sistema*

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \, y_1 + \operatorname{sen} x \, y_2 \\ y_2' = \operatorname{sen} x \, y_1 + \cos x \, y_2 \end{cases}$$

Problema 3.28 *Demuestra el siguiente principio de superposición: La solución del sistema de EDOs lineales* $Y' = A(x)Y + \sum_{k=0}^m f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$, Y, $f_k \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es la suma* $\sum_{k=0}^m Y_k$ *de las soluciones* Y_k *de las ecuaciones* $Y_k' = A(x)Y_k + f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

4. La ecuación lineal de orden n

Vamos a continuación a aplicar los resultados obtenidos a un grupo de EDOs muy importante: las EDOs lineales con coeficientes constantes de orden mayor que 1 definida por la ecuación:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{4.1}$$

Cuando $f(x) \equiv 0$, diremos que la EDO (4.1) es homógenea, en caso contrario es no homogénea.

Si además imponemos que la solución y sea tal que

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

entonces diremos que y es la solución del correspondiente problema de valores iniciales.

Por comodidad introduciremos el operador $\mathcal{L}[y]$ definido sobre el espacio de las funciones n veces derivables con n-èsima derivada continua definido por

$$\mathcal{L}[y] = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x). \tag{4.2}$$

Usando esta notación podemos escribir (4.1) como $\mathcal{L}[y] = f(x)$ y el correspondiente problema homogéneo será $\mathcal{L}[y] = 0$.

Proposición 4.1 *La EDO*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{4.3}$$

es lineal, es decir, que si tenemos dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación, para cualesquiera que sean α, y $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha y_1 + \beta y_2$ también es solución.

Para estudiar las propiedades de las EDOs lineales de orden n vamos a introducir unas nuevas funciones $z_1(x), \ldots z_n(x)$ de forma que

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1(x) &=& y(x) \\ z_2(x) &=& y'(x) \\ z_3(x) &=& y''(x) \\ &\vdots& \\ z_{n-1}(x) &=& y^{(n-2)}(x) \\ z_n(x) &=& y^{(n-1)}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dfrac{dz_n}{d_x} &=& -a_{n-1}z_n - a_{n-2}z_{n-1} - \cdots - a_0 z_1 + f, \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} &=& z_n, \\ &\vdots& \\ \dfrac{dz_1}{dx} &=& z_2. \end{array}$$

Es decir, una EDO del tipo (4.1) es equivalente al siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

o en forma matricial $Z'(x) = AZ(x) + F(x)$. Nótese que cuando $f(x) \equiv 0$, el sistema anterior se transforma en un sistema homogéneo. Lo anterior tiene una implicación evidente: toda la teoría de las ecuaciones lineales (4.1) se puede construir a partir de la teoría de los sistemas lineales que estudiamos antes.

Teorema 4.2 *Sean $a_0(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$. Entonces el P.V.I. asociado a (4.1) siempre tiene solución y es única cualquiera sean las las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'(0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ que escojamos.*

Teorema 4.3 *El conjunto de soluciones de la EDO homogénea (4.3) es un espacio vectorial de dimensión n.*

Teorema 4.4 *Dadas n soluciones $y_1, \dots, y_n$ de la EDO (4.3), éstas son linealmente independientes si y sólo si el wronskiano $W[y_1, \dots, y_n](x)$, definido por*

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x, \tag{4.5}$$

es distinto de cero para algún $x \in \mathbb{R}$, en cuyo caso el Wronskiano es distinto de cero para todo $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, notemos que conocida la solución general $y_h(x)$ de la EDO homogénea podemos dar la solución general de la EDO (4.1) en la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, siendo y_p una solución particular de (4.1).

4.1. Solución de la ecuación lineal homogénea

Para resolver la EDO (4.3) con coeficientes constantes seguiremos la misma idea que para los sistemas, es decir buscaremos la solución en la forma $y(x) = e^{\lambda x}$. Sustituyendo esta función en la EDO (4.3) obtenemos que λ debe satisfacer la ecuación

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.6}$$

La ecuación anterior se denomina ecuación característica de la EDO (4.3). Es fácil probar que el polinomio característico de la matriz A asociada a la EDO (4.3) coincide con (4.6). Lo anterior nos indica una estrategia para resolver el problema:

1. Si tenemos valores reales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ entonces las funciones $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $k = 1, \dots, n$ generan el espacio solución de la la EDO (4.3).

   En el caso que tengamos raíces complejas hay que proceder como en el caso de los sistemas: tomar partes reales y complejas de cada una de ellas. Es decir, si $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces las dos soluciones independientes son $\Re[e^{(\alpha+i\beta)x}] = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $\Im[e^{(\alpha+i\beta)x}] = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$.

2. Si algún λ_k es múltiple de multiplicidad $m \leq n$, entonces la solución habrá que buscara en la forma
$$y(x) = e^{\lambda_k x} p_{m-1}(x), \tag{4.7}$$
   donde p_{m-1} es un polinomio de grado $m-1$ en x, es decir la solución asociada a dicha raíz tendrá la forma
$$y(x) = c_1 e^{\lambda_k x} + c_2 x e^{\lambda_k x} + \cdots + c_m x^{m-1} e^{\lambda_k x}, \qquad c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}.$$
   Obviamente si λ_k es complejo, tenemos que tomar partes reales y complejas que nos generan todo el espacio solución.

Por simplicidad mostraremos cómo resolver la ecuación homogénea de segundo orden. El caso general es completamente análogo. La ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes tiene la forma:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

La ecuación característica (4.6) de la ecuación (4.8) tiene la forma

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{4.9}$$

Las soluciones de la ecuación característica (4.9) serán

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Caso de dos raíces reales y distintas. Sea $p^2 > 4q$, entonces la ecuación característica (4.9) tiene dos soluciones reales y distintas:

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

y la ecuación homogénea (4.8) tendrá dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Luego, la solución general de (4.9) se expresará de la forma

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Caso de dos raíces reales iguales. Sea $p^2 = 4q$, entonces la ecuación característica (4.9) tiene una única solución real $\lambda = -p/2$. Esto significa que aparentemente sólo tenemos una función que genera al espacio solución de la EDO homogénea, sin embargo dicho espacio es de dimensión 2 como nos asegura el teorema 4.3 y la ecuación homogénea (4.8) tendrá dos soluciones linealmente independientes de la forma $y_1(x) = e^{\lambda x}$ y $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. En efecto, usando (4.7) tenemos que la solución generada por λ es, en este caso,

$$y(x) = e^{\lambda x} p_1(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

como se pretendía probar.
Caso de raíces complejas. Sea $p^2 < 4q$, entonces la ecuación característica (4.9) tiene dos soluciones complejas:

$$\lambda_1 = \frac{-p + i\sqrt{4q - p^2}}{2}, \quad \frac{-p - i\sqrt{4q - p^2}}{2}, \quad i = \sqrt{-1},$$

y la ecuación homogénea (4.8) tendrá dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Luego, la solución general de (4.9) se expresará de la forma

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Llamemos λ a la parte real de λ_1 (o λ_2) y ω a la parte imaginaria de λ_1 (o λ_2). Entonces,

$$\lambda_1 = \lambda + i\omega, \quad \lambda_2 = \lambda - i\omega, \qquad \lambda, \omega \in \mathbb{R}.$$

Si ahora utilizamos la fórmula de Euler $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$, obtenemos que la solución general de (4.10) se puede escribir de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(A\cos\omega x + B\operatorname{sen}\omega x\right), \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente,

$$y(x) = A\, e^{\lambda x}\cos\left(\omega x + \delta\right), \qquad A, \delta \in \mathbb{R}.$$

4.2. La EDO lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes

Vamos a estudiar la EDO

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \qquad f(x) \quad \text{continua}, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

En general no es trivial resolverla aunque en muchos casos es "fácil" adivinar la solución.

4.2.1. Caso $f(x) = p_n(x)$

En general si tenemos la EDO

$$y'' + py' + qy = p_n(x), \qquad q \neq 0, \tag{4.12}$$

siendo p_n un polinomio de grado n, la solución particular siempre es de la forma

$$y_p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0.$$

En efecto, si sustituimos la solución anterior en la EDO (4.12) obtenemos

$$qa_n x^n + (qa_{n-1} + pna_n)x^{n-1} + \cdots + (qa_k + p(k+1)a_{k+1} + (k+1)(k+2)a_{k+2})x^k + \cdots$$
$$+(qa_0 + pa_1 + 2a_2) = p_n(x),$$

de donde igualando coeficientes obtenemos un sistema compatible de ecuaciones ya que hemos supuesto que el grado de p_n es exactamente n.

Este método obviamente funciona si $q \neq 0$ (¿por qué?), pero ¿qué ocurre si $q = 0$?, o sea, si tenemos la EDO

$$y'' + py' = p_n(x), \qquad a \neq 0, \tag{4.13}$$

siendo p_n un polinomio de grado n. Entonces el método anterior no funciona pues si sustituimos $y_p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, obtenemos que $\mathcal{L}[y_p]$ es un polinomio de grado $n-1$ mientras que el derecho es de grado n. Para resolver el problema buscamos la solución de la forma

$$y_p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}.$$

Ahora bien, como la EDO homogénea es $y'' + py' = 0$, entonces cualquier constante es solución, por tanto a_0 en la expresión anterior puede ser cualquiera, así que sin pérdida de generalidad la tomaremos igual a cero, luego la solución particular la podemos buscar en la forma $y_p(x) = xr_n(x)$ y los coeficientes de r_n los encontramos sustituyendo dicha solución en (4.13) e igualando coeficientes.

4.2.2. Caso $f(x) = p_n(x)e^{cx}$

Veamos ahora las EDOs del tipo

$$y'' + py' + qy = e^{cx} p_n(x), \tag{4.14}$$

siendo p_n un polinomio de grado n. Para resolverlo hacemos el cambio $y(x) = e^{cx}v(x)$, que nos conduce a

$$\mathcal{L}[y] = e^{cx}\{v'' + (2c+p)v' + (q + pc + c^2)v\},$$

luego

$$v'' + (2c+p)v' + (q + pc + c^2)v = p_n(x),$$

por lo que nuestra EDO (4.14) se reduce al caso anterior (4.12).

4.2.3. Caso $f(x) = p_n(x)e^{cx}\operatorname{sen}(\omega x)$ y $p_n(x)e^{cx}\operatorname{sen}(\omega x)$

Veamos ahora como resolver los casos

$$y'' + py' + qy = p_n(x)e^{cx}\operatorname{sen}(\omega x), \qquad y'' + py' + qy = p_n(x)e^{cx}\cos(\omega x), \tag{4.15}$$

siendo p_n un polinomio de grado n.

Para resolver este caso notemos que si $y(x) = u(x) + iv(x)$, u, v, funciones reales es una solución de

$$\mathcal{L}[y] = y'' + py' + qy = f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad f_1, f_2 \text{ funciones reales},$$

entonces $\mathcal{L}[u] = f_1$ y $\mathcal{L}[v] = f_2]$, lo cual es consecuencia de la linealidad $\mathcal{L}$.

Sea entonces $y_p(x) = u(x) + iv(x)$ una solución particular de

$$\mathcal{L}[y] = y'' + py' + qy = p_n(x)e^{i\omega x} = p_n(x)\cos(\omega x) + ip_n(x)\operatorname{sen}(\omega x).$$

Entonces $\Re[y_p] = u(x)$ es solución de $y'' + py' + qy = p_n(x)\cos(\omega x)$ y $\Im[y_p] = v(x)$ de $y'' + py' + qy = p_n(x)\operatorname{sen}(\omega x)$.

4.2.4. El método de los coeficientes indeterminados

Sea la EDO lineal no homogéna (4.11) $y''(x)+py'(x)+qy(x) = f(x)$ y sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes. Entonces vamos a buscar la solución de la EDO en la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

con c_1 y c_2 tales que

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \tag{4.16}$$

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{4.17}$$

De esa forma tenemos que resolver dos EDOs de primer orden. Para ello multiplicamos la primera por y_1', la segunda por y_1 y las restamos lo que nos da $c_2'[y_1y_2' - y_1'y_2] = f\,y_1$, o bien, la primera por y_2' y la segunda por y_2, para obtener $c_1'[y_1y_2' - y_1'y_2] = -f\,y_2$. Ahora bien, $[y_1y_2' - y_1'y_2] = W[y_1, y_2](x) \neq 0$ cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ pues el Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la EDO homogénea nunca se anula (ver el teorema 4.4), de donde obtenemos que c_1 y c_2 satisfacen las EDOs

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}. \tag{4.18}$$

El método anterior se denomina método de Lagrange de reducción del orden de la EDO de segundo orden o método de los coeficientes indeterminados. Obviamente este método se puede generalizar fácilmente para el caso de orden n.

Ejemplo 4.5 *Resolver $y'' - y = e^{2x}$.*

La solución general del problema homogéneo es $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, entonces buscamos la solución particular en la forma[5] $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Como $W[y_1, y_2](x) = W[e^x, e^{-x}] = -2$, la fórmula (4.18) nos da

$$c_1' = \frac{e^x}{2}, \quad c_2' = -\frac{e^{3x}}{2} \quad \Longrightarrow \quad c_1(x) = \frac{e^x}{2}, \quad c_3(x) = -\frac{e^{-x}}{6}, \quad \Longrightarrow \quad y_p(x) = \frac{e^{2x}}{3}.$$

Por tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}.$$

[5]De aquí el nombre de método de *variación de las constantes*, pues se cambian las constantes que aparecen en la solución general del problema homogéneo por funciones indeterminadas.

4.3. Aplicaciones

Ejemplo 4.6 *Vibraciones mecánicas*

Como primer ejemplo consideraremos un carro de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza F y que esta sujetado a la pared mediante un resorte de constante elástica k (ver figura 8). Si suponemos además que la fuerza de rozamiento es proporcional a su velocidad entonces la segunda ley de Newton nos conduce a la EDO $mx'' + ax' + kx = F(x)$, o equivalentemente,

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = f(t), \qquad \alpha = \frac{a}{2m} > 0,\ \omega^2 = \frac{k}{m},\ f(t) = \frac{F(t)}{m}. \tag{4.19}$$

con las condiciones iniciales para $t = 0$ de la posición $x(0) = x_0$ y la velocidad $x'(0) = v_0$.

Vamos a estudiar los distintos casos

1. El primer caso corresponde cuando no tenemos fuerza externa ni rozamiento, o sea, $f = 0$ y $\alpha = 0$. Entonces la EDO (4.19) es $x'' + \omega^2 x = 0$ y por tanto la solución general es

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t),$$

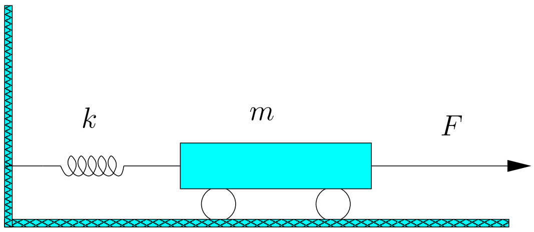


Figura 8: Carro del ejemplo 4.6.

que al usar las condiciones iniciales se transforma en

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0/\omega \operatorname{sen}(\omega t) = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}\cos(\omega t - \delta), \qquad \delta = \arctan(\omega x_0/v_0).$$

la solución en este caso es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$ por lo que el movimiento se denomina *movimiento armónico simple* (ver figura 9 izquierda).

En la última igualdad hemos usado la identidad

$$a\cos(\omega t) + b \operatorname{sen}(\omega t) = A\cos(\omega t - \delta), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2},\ \ \delta = \arctan(b/a), \tag{4.20}$$

cuya demostración es inmediata, basta aplicar la fórmula para el coseno de una suma e identificar los coeficientes del seno y el coseno.

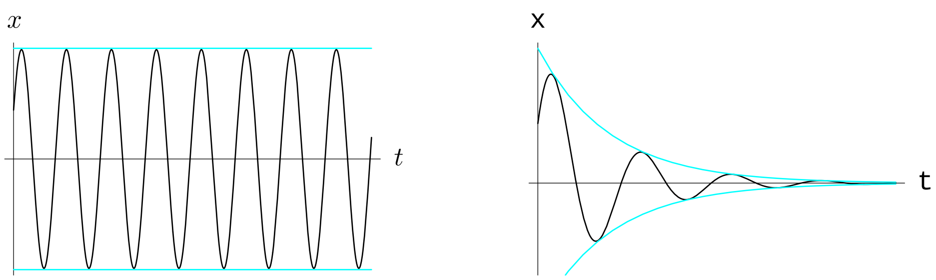


Figura 9: El movimiento armónico simple y el movimiento amortiguado.

2. Supongamos ahora que eliminamos solamente la fuerza externa, entonces la solución es

$$x(t) = c_1 e^{-\alpha x + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}x} + c_2 e^{-\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}x}.$$

Tenemos que considerar tres casos:

2a. Si $\alpha > \omega$, entonces, llamando $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha$ tenemos la solución

$$x(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t},$$

que decrece exponencialmente a cero. En este caso se dice que el movimiento es sobreamortiguado ya que en un breve espacio de tiempo el carro se para.

2b. Si $\alpha = \omega$, entonces la solución es

$$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t},$$

que también decrece exponencialmente a cero.

2c. Si $\alpha < \omega$, entonces, llamando $\beta = \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} < \alpha$ tenemos la solución

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right],$$

que decrece oscilando exponencialmente a cero (ver figura 9 derecha). En este caso se dice que el movimiento es amortiguado ya que aunque oscila, las oscilaciones terminan en un breve espacio de tiempo y el carro se para.

3. Veamos el caso general y, por simplicidad, consideremos el caso de una fuerza periódica muy frecuente en la naturaleza. En este caso la ecuación es de la forma

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t).$$

Obviamente la solución general es la suma de una solución particular más la solución general de la EDO homogénea que acabamos de considerar. Para encontrar una solución particular usamos el método aprendido antes, lo que nos da

$$y_p(t) = \frac{f_0 e^{i\Omega t}}{\omega^2 - \Omega^2 + i2\alpha\Omega} \quad \Longrightarrow \quad x_p(t) = \Re[y_p] = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2\alpha\Omega \operatorname{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} f_0,$$

de donde deducimos la solución

$$x(t) = x_h(t) + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2\alpha\Omega \operatorname{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} f_0. \tag{4.21}$$

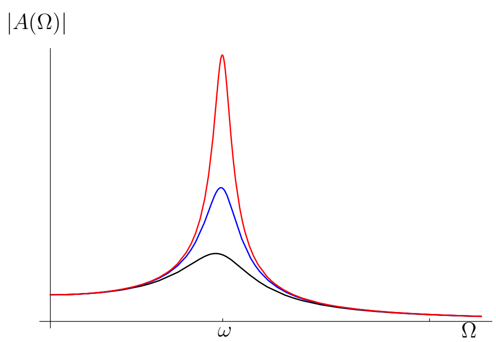


Figura 10: Amplitud de las vibraciones forzadas: resonancia.

Nótese que en todos los casos $x_h(t)$ tiende exponencialmente a cero por lo que si t es suficiente grande $x(t) \approx x_p(t)$. Si usamos la identidad (4.20) obtenemos para t suficientemente grande la solución

$$x(t) \approx x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \delta),$$

donde $\delta = \arctan\left(\frac{2\alpha\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right)$.

Como se ve en la fórmula anterior, las oscilaciones tienen una amplitud que depende de la propia frecuencia de oscilación. Obviamente para $\Omega = \omega$ la amplitud es máxima, es decir cuando la frecuencia Ω de la fuerza exterior es igual a ω — como ω sólo depende de las características de sistema, en este caso m y k, se suele denominar frecuencia *propia*—. En la figura 10 representamos el valor de la amplitud (eje y en función de la frecuencia exterior (eje x) para distintos valores de α. La gráfica más alta corresponde al menor valor de α (menor "viscosidad") y la más pequeña al mayor. Si $\alpha = 0$ es fácil ver que para $\Omega = \omega$ la amplitud es no acotada. Este fenómeno de "amplificación" de la amplitud de las oscilaciones se conoce como *resonancia*.

Veamos ahora que ocurre si $\alpha = 0$, o sea si no hay rozamiento. En este caso la EDO es

$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cos(\Omega t).$$

Si $\Omega \neq \omega$ entonces simplemente tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$ en (4.21) que nos da,

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t).$$

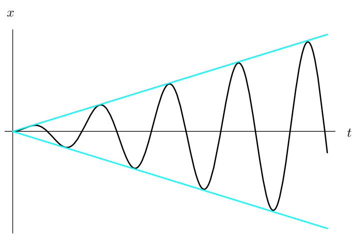


Figura 11: Resonancia en un sistema sin rozamiento.

Si $\Omega = \omega$ entonces la solución anterior no vale como se puede comprobar fácilmente (pues $f_0/(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t)$ deja de tener sentido). En este caso tenemos que repetir el proceso anterior lo que nos da, para la solución particular la expresión

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{f_0 t}{2i\omega} e^{i\omega t}\right] = \frac{f_0 t}{2\omega} \operatorname{sen}(\omega t),$$

y por tanto,

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{f_0}{2\omega}\, t \operatorname{sen}(\omega t).$$

Nótese que a diferencia del caso con rozamiento, en éste, si $t \to \infty$, la solución es no acotada pues $f_0 t/(2\omega) \to \infty$, es decir nuestro sistema presenta un movimiento oscilatorio con frecuencia fija pero con amplitud que aumenta linealmente con el tiempo.

El fenómeno de la resonancia es conocido desde hace muchos años y es el causante de más de un desastre en sistemas mecánicos. Por ejemplo, en 1831, un grupo de soldados intentó cruzar marchando en puente de Broughton (cerca de Manchester, Inglaterra). La fuerza periódica que ejercieron al marchar entró en resonancia con la frecuencia propia del puente y este se vino abajo. A partir de ese momento se prohibió a los soldados marchar cuando fuesen a cruzar un puente.

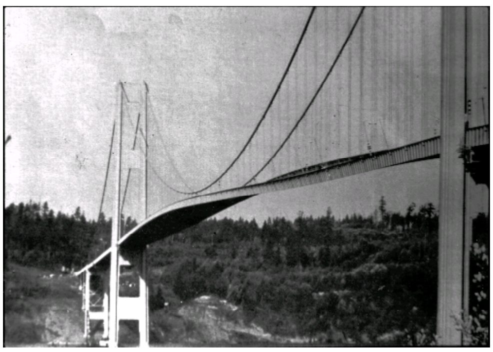
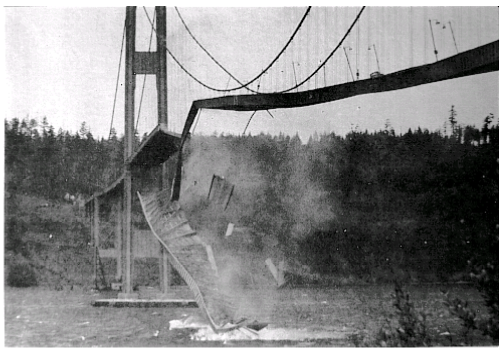



Figura 12: El desastre del puente de Tacoma.

Otro famoso desastre fue el puente de Tacoma en el estado norteamericano de Washington. Este puente se abrió al público el 1 de julio de 1940. Desde ese mismo día, se observó que el puente comenzaba a oscilar (ver figura 12 izquierda) lo que lo convirtió en una *atracción turística local* pues cientos de conductores iban sólo para *disfrutar* de este extraño fenómeno. El puente parecía aguantar bien, es más varios expertos aseguraban que todo estaba *bajo control*, pero el 7 de noviembre de 1940 las oscilaciones empezaron a hacerse mayores y sobre las 10:00 am alcanzaban los 7 metros. Obviamente el puente había entrado en resonancia con el aire debido a un fenómeno aerodinámico y terminó por derrumbarse a las 11:10am (ver figura 12 derecha), afortunadamente sin ninguna víctima humana (sólo murió el perrito de un periodista que hasta última hora estuvo sobre el puente y logró escapar de milagro pero olvidó su perro en el interior de su coche atrapado en el medio del puente).

Ejemplo 4.7 *Vibraciones eléctricas*

Consideremos ahora el circuito eléctrico representado el la figura 13 donde R es una resistencia, L una inductancia y C un capacitor conectados en seria a una fuente de corriente $U(t)$.

Denotemos por $q(t)$ la carga que hay en el capacitor en el momento de tiempo y por $i(t) = q'(t)$ la corriente, o sea, la carga por unidad de tiempo. Entonces, la Ley de Kirchov nos da la siguiente ecuación que determina la carga $q(t)$

$$U(t) = Li'(t) + Ri + C^{-1}q(t),$$

o, equivalentemente,

$$q'' + 2rq' + \omega^2 q(t) = u(t),$$

donde $r = R/(2L)$, $\omega^2 = 1/(LC)$ y $u(t) = U(t)/L$.

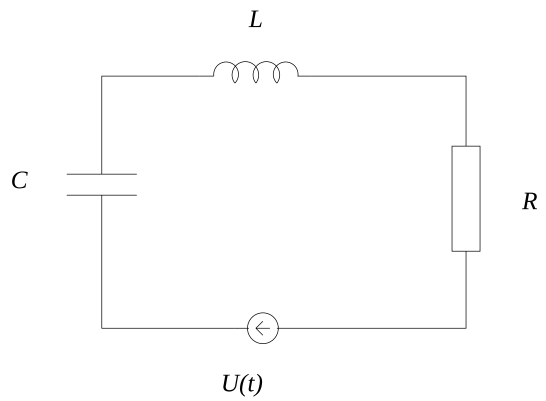


Figura 13: Circuito RLC del ejemplo 4.7.

Obviamente la EDO anterior es totalmente análoga a la EDO (4.19). En particular la solución general de ésta en el caso cuando $u(t) = u_0 \cos(\Omega t)$ es

$$q(t) = q_h(t) + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2r\Omega \operatorname{sen}(\Omega t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4r^2\Omega^2} u_0, \tag{4.22}$$

donde

$$q_h(t) = \begin{cases} c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}, & r > \omega \\ (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t}, & r = \omega \\ e^{-\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right], & r < \omega \end{cases}$$

siendo $\beta = \sqrt{|r^2 - \omega^2|}$.

En particular, si $\Omega = \omega$ tenemos la solución

$$q(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{u_0}{2\omega} t \operatorname{sen}(\omega t),$$

que es no acotada. Lo anterior nos indica que el análisis de un circuito RLC es análogo al de un oscilador, en particular tendremos el mismo fenómeno de resonancia cuando $\Omega \approx \omega$. De hecho, en este fenómeno se basan los equipos de radio actuales.

Ejemplo 4.8 *Los osciladores acoplados*

En el ejemplo anterior hemos estudiado el movimiento de un oscilador armónico y hemos descubierto que éste se puede describir fácilmente con una EDO lineal de orden dos. Vamos a ver a continuación el caso de varios osciladores acoplados.

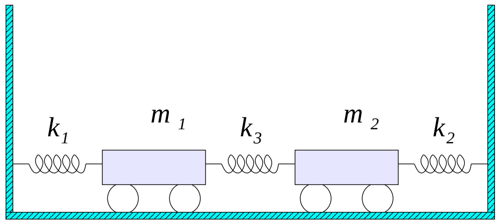


Figura 14: Dos osciladores acoplados.

En la figura 14 vemos dos osciladores acoplados. Obviamente si no existiera el resorte k_3 que los une cada uno oscilaría según la ley que hemos visto antes. Veamos que ocurre al incluir este resorte. Llamemos x_1 y x_2 a los desplazamientos de la posición de equilibrio de los carros m_1 y m_2 respectivamente, entonces la segunda Ley de Newton nos da

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3 x_2, \\ m_2 x_2'' &= -k_3(x_2 - x_1) - k_2 x_2 = k_3 x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Para resolver el problema vamos a despejar x_2 en la primera ecuación y sustituirla en la segunda. Eso nos conduce a la siguiente EDO lineal de cuarto orden

$$x_1^{(4)} + \left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right) x_1'' + \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{m_1}\right)\left(\frac{k_2 + k_3}{m_2}\right) - \frac{k_3^2}{m_1 m_2}\right] x_1 = 0. \tag{4.24}$$

Por simplicidad escojamos $m_1 = m_2$ y $k_1 = f_2 = k_3$. Entonces (4.24) nos da

$$x_1^{(4)} + 4\omega^2 x_1'' + 3\omega^4 x_1 = 0, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^4 + 4\omega^2\lambda^2 + 3\omega^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{3}\omega i, \ \pm\omega i,$$

de donde deducimos que la solución tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \ c_1 \cos(\sqrt{3}\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\omega t) + c_3 \cos(\omega t) + c_4 \operatorname{sen}(\omega t) \\ = & \ A_1 \cos(\sqrt{3}\omega t - \delta_1) + A_2 \cos(\omega t - \delta_2). \end{aligned}$$

De la solución podemos ver que en función de las condiciones iniciales puede ocurrir que A_1 o A_2 se anulen. En este caso el sistema tiene un movimiento oscilatorio con frecuencias ω y $\sqrt{3}\omega$, conocidas como frecuencias propias del sistema. Análogamente se puede obtener la expresión para x_2.

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \ c_1(2 - \omega^2)\cos(\omega t) + c_3(2 - 3\omega^2)\cos(\sqrt{3}\omega t) + 2c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \\ & -c_2\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) + 2c_4 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\omega t) - 3c_4\omega^2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\omega t) \end{aligned}$$

Escojamos $k = m = 1$ de forma que $\omega = 1$. Entonces

$$x_1(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t) + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t,$$

$$x_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - c_3 \cos(\sqrt{3}t) + c_4 \operatorname{sen}(\sqrt{3}t).$$

Supongamos que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $x_2'(0) = 0$, entonces obtenemos

$$x_1(t) = \cos t \qquad x_2(t) = \cos t.$$

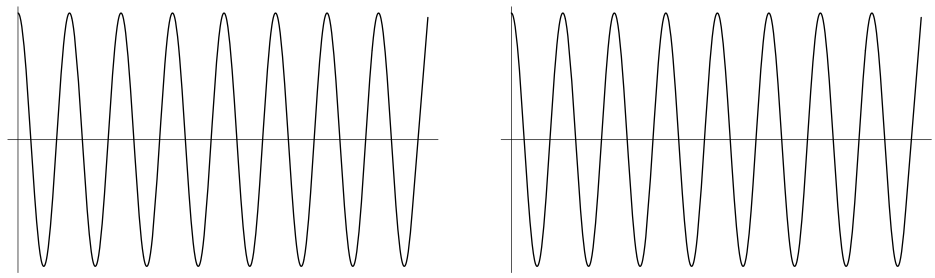


Figura 15: Caso $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $x_2'(0) = 0$.

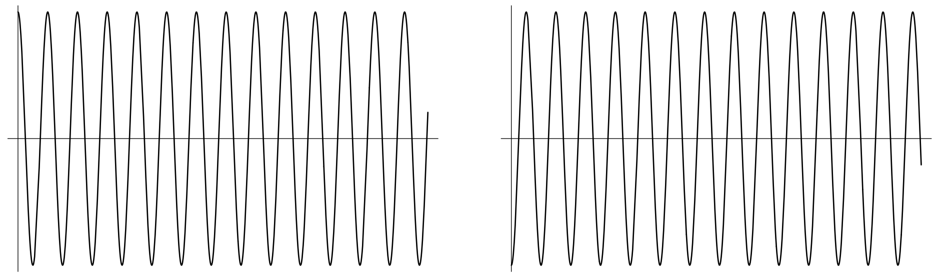


Figura 16: Caso $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 0$.

Si $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 0$, tenemos

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{3}t), \qquad x_2(t) = -\cos(\sqrt{3}t),$$

o sea, tenemos que las oscilaciones son con las frecuencias propias.

Pero si escogemos, por ejemplo, $x_1(0) = 1/2$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 1/2$, obtenemos

$$x_1(t) = \frac{-\cos(t)}{4} + \frac{3\cos(\sqrt{3}\,t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{4} + \frac{\sin(\sqrt{3}\,t)}{4\sqrt{3}},$$

$$x_2(t) = \frac{-\cos(t)}{4} - \frac{3\cos(\sqrt{3}\,t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{4} - \frac{\sin(\sqrt{3}\,t)}{4\sqrt{3}},$$

es decir, es una combinación de las frecuencias.

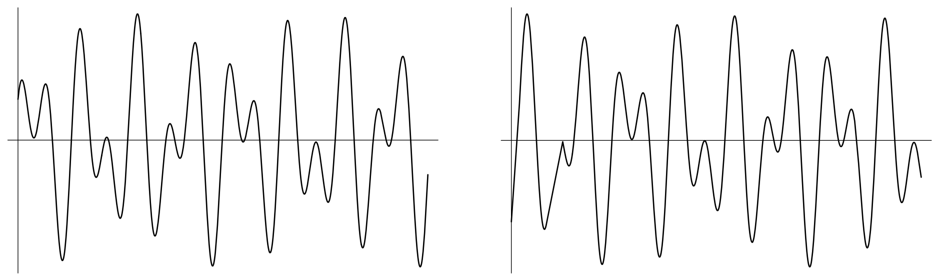


Figura 17: Caso $x_1(0) = 1/2$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ y $x_2'(0) = 1/2$.

4.4. Problemas

Problema 4.9

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales y la solución correspondiente a las condiciones iniciales indicadas:

1. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(2) = 0, y'(2) = 1$.
2. $y'' + 12y' + 36y = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Problema 4.10

Resolver las EDOs

1. $y'' - 4x = 4x^2 + 2x$.
2. $y'' + y' + y = 1 + 2x + 3x^3$.
3. $y'' - y = x^2 e^x$ con $y(0) = y'(0) = 0$.
4. $y'' + 2y + 1 = xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' + 2y' = 1 + x^2 + e^{-2x}$.
6. $y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} x + xe^{2x}$.

Problema 4.11

El oscilador armónico simple y el péndulo simple se representan esquemáticamente en la gráfica 18 a la izquierda y derecha respectivamente.

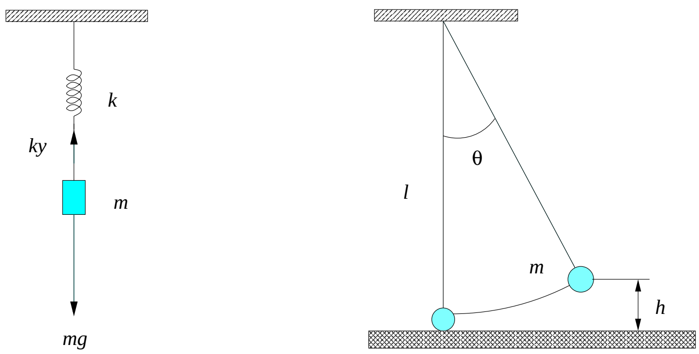


Figura 18: El oscilador y el péndulo simple.

Las EDOs que gobiernan estos sistemas son

$$my'' + ky = 0, \qquad \text{y} \qquad l\theta'' + g\theta = 0,$$

respectivamente, donde $y(t)$ es distancia a que se encuentra el cuerpo de masa m de su posición de equilibrio (figura 18 izquierda) y $\theta(t)$ es el ángulo que forma el péndulo con la horizontal (figura 18 derecha).

1. Encuentra la solución general de ambas EDOs.

2. Si el oscilador se encontraba en el inicio en su posición de equilibrio ($y(0) = 0$) y tenía una velocidad inicial $y'(0) = v_0$, ¿qué posición ocupa al cabo de 1 segundo? ¿y al cabo de t segundos?

3. Si suponemos que inicialmente el péndulo se deja caer desde una altura $h = l/10$, sin velocidad inicial, a qué altura se encuentra el mismo al cabo de 1 segundo ¿y al cabo de t segundos?

Problema 4.12

Resuelve las EDOs
1. $y''' + 8y = x^2$, 2. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = xe^x + x^2$, 3. $y^{(4)} - 16y = 3\cos(x)$.

Problema 4.13

Encuentra la EDO que gobierna un sistema de dos osciladores acoplados como el del ejemplo 4.8 incluyendo rozamiento. Haga el estudio análogo si sobre el primer carro actúa una fuerza externa del tipo $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

En ambos casos resuelva la EDO correspondiente. Analice los casos: 1.) $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2 = k_3$, 2.) $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$, $k_3 = 2k_1$ y 3.) $m_1 = 2m_2$ y $k_1 = k_2 = k_3$.

Problema 4.14

Encuentra la EDO que gobierna un sistema de tres osciladores como el que se muestra en la figura 19 y resuélvela.

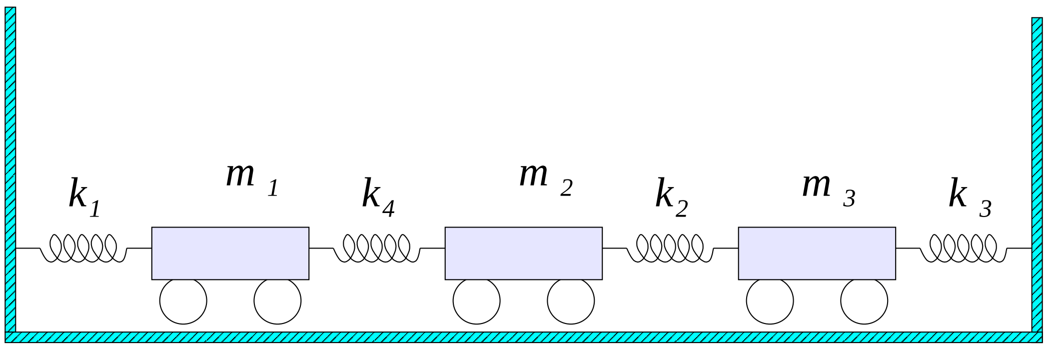


Figura 19: Tres osciladores acoplados.

5. Soluciones de EDOs en serie de potencias

Sea la EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{5.1}$$

El objetivo es resolver la EDO anterior cuando las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ dependen de x. Para ello vamos a suponer que dichas funciones son "razonablemente" buenas en un entorno de cierto punto x_0 de la recta real y buscaremos la solución como una *serie de potencias*, es decir en la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Las funciones que se pueden expresar mediante una serie de potencias convergentes en todo un entorno de $x = x_0$ como la anterior se denominan funciones analíticas en $x = x_0$. Por sencillez supondremos $x_0 = 0$, ya que en caso que $x_0 \neq 0$ siempre podemos realizar el cambio de variable $z = x - x_0$ de forma que en la nueva variable $z_0 = 0$.

La idea del método es sustituir la serie $y(x)$ (5.2) en (5.1) e igualar los coeficientes de las potencias. De esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones para los coeficientes a_n en (5.2). Es importante que la serie converja en todo un entorno de x_0, de esta forma tenemos asegurada la existencia de la solución al menos en cierta región. Antes de enunciar nuestros primeros resultados veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.1 *Resolver la EDO $y'' - 2x' - 2y = 0$.*

Buscamos la solución $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, la sustituimos en la EDO y usamos que

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

lo que nos da

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0,$$

que equivale a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - (2n+2) a_n\right] x^n = 0.$$

Como $(x^n)_n$ es una sucesión de funciones linealmente independientes la igualdad a cero tiene lugar si y sólo si $(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n+2)a_n = 0$, de donde tenemos

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n, \qquad n \geq 0.$$

Obviamente la ecuación anterior define todos los valores de a_n en función de a_0 y a_1. En efecto, si sabemos a_0, la recurrencia anterior permite calcular los valores a_2, a_4, $\ldots a_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ y si conocemos a_1 entonces podemos calcular a_3, a_5, $\ldots a_{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Así, tenemos

$$a_{2n} = \frac{2}{2n} a_{2n-2} = \left(\frac{2}{2n}\right)\left(\frac{2}{2n-2}\right) a_{2n-4} = \cdots = \frac{2^n}{(2n)(2n-2)\cdots 2} a_0 = \frac{a_0}{n!},$$

$$a_{2n+1} = \frac{2}{2n+1} a_{2n-1} = \left(\frac{2}{2n+1}\right)\left(\frac{2}{2n-1}\right) a_{2n-3} = \cdots = \frac{2^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} a_1,$$

es decir $2^n/(2n+1)!!\, a_1$, donde $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)$. De esta forma obtenemos dos soluciones linealmente independientes (una tiene solo potencias pares y la otra solo impares)

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Obviamente la primera suma es fácilmente reconocible como la serie de potencias de la función e^{x^2}, no así la segunda que en general no se expresa como combinación de funciones elementales. De la expresión explícita de las dos sumas anteriores es fácil comprobar que el radio de convergencia es infinito.

Esta claro que el método anterior no siempre funciona. Por ejemplo, consideremos la EDO

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Si sustituimos la serie de potencias tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k = 0$$

de donde se deduce

$$a_0 = 0, \qquad (n-1)(n+2)a_n = 0, \quad n\in\mathbb{N} \quad\Longrightarrow\quad a_n = 0, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\neq 1$$

es decir, sólo podemos encontrar una solución: $y_1(x) = x$. Ello es fácil de entender pues la otra solución de esta EDO es $y_2(x) = 1/x^2$ que obviamente no está definida en $x = 0$.

5.1. El método de reducción de orden

Supongamos que conocemos una solución $y_1(x)$ no nula de la EDO $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$. Busquemos la segunda solución independiente $y_2(x)$ en la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Sustituyendo y_2 en la EDO y usando que $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ tenemos para v la EDO

$$y_1 v'' + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0 \quad\Longrightarrow\quad y_1 u' + (2y_1' + p(x)y_1)u, \quad u = v',$$

de donde deducimos

$$u(x) = C\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} \quad\Longrightarrow\quad v(x) = C\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} + D.$$

Como $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ podemos escoger, sin pérdida de generalidad $C = 1$ y $D = 0$.

Ejemplo 5.2 *Encontrar la segunda solución linealmente independiente de la ED* $y''+p_0/xy'+(p_0-1)^2/(4x^2)y = 0$ *si una solución es* $y_1(x) = x^{-p_0/2+1/2}$.

Como $y_1(x) = x^{-p_0/2+1/2}$ y $p(x) = p_0/x$, entonces

$$u(x) = v'(x) = C\frac{e^{-\int p_0/x dx}}{x^{-p_0+1}} = Ce^{-p_0\log x}x^{p_0-1} = \frac{C}{x} \quad\Longrightarrow\quad v(x) = \log x$$

de donde $y_2(x) = x^{-p_0/2+1/2}\log x$.

Es fácil ver que si aplicamos el método de reducción de orden a la ecuación $x^2y'' + 2xy - 2y = 0$ estudiada en el apartado anterior obtenemos que la segunda solución linealmente independiente es $y_2(x) = 1/x^2$.

5.2. Puntos regulares y singulares de una EDO

Definición 5.3 *Dada la EDO (5.1), el punto x_0 se denomina punto regular de (5.1) si $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$, o sea, si $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ admiten una representación en serie de potencias en un entorno de x_0. En caso contrario se dice que x_0 es un punto singular.*

Por ejemplo, el punto $x_0 = 0$ es un punto regular de la EDO $xy'' + (\operatorname{sen} x)y' + x^3y = 0$, mientras que $x_0 = 0$ es un punto singular de $y'' + x^2y' + x^{2/3}y = 0$.

Teorema 5.4 *Sea x_0 un punto regular de la EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Entonces:*

1. *Para $f(x) = 0$ (problema homogéneo) la EDO anterior tiene como soluciones linealmente independientes dos funciones analíticas.*

2. *La solución del problema de valores iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ existe y es única y se expresa mediante una serie de potencias (es decir es una función analítica).*

Es posible, además, probar que el radio de convergencia de la solución de la EDO (5.1) es el menor de los radios de convergencia de p, q y f.

Esta claro que el punto $x = 0$ es singular para la EDO $y'' + x^2y' + x^{2/3}y = 0$. Una opción es resolver entonces la ecuación usando una serie en torno a otro punto, por ejemplo $x = 1$. No obstante muchas veces es necesario ver lo que ocurre en el entorno del punto singular. Ello no siempre es posible, aunque en algunos casos, si lo es.

Definición 5.5 *Un punto x_0 se denomina punto singular regular de la EDO (5.1), si las funciones $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.*

Lo anterior equivale a que

$$(x-x_0)p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x-x_0)^k = p_0+p_1x+\cdots, \qquad (x-x_0)^2q(x)\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x-x_0)^k = q_0+q_1x+\cdots.$$

Usualmente la EDO homogénea ($f(x) \equiv 0$) (5.1) con un punto singular en x_0 se escribe de la forma

$$(x - x_0)^2y'' + (x - x_0)[(x - x_0)p(x)] + [(x - x_0)^2q(x)]y = 0. \tag{5.3}$$

Definición 5.6 *La ecuación $r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$ se denomina ecuación indicial de la EDO (5.3) con un punto singular en x_0.*

En lo que sigue, por simplicidad, asumiremos $x_0 = 0$.

Un ejemplo muy sencillo de EDO con un punto singular regular en el cero es la EDO de Euler

$$x^2y'' + xp_0y' + q_0y = 0. \tag{5.4}$$

Si buscamos la solución en forma de serie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ y sustituimos en la EDO anterior deducimos

$$[n(n - 1) + np_0 + q_0]a_n = 0, \qquad \forall n \geq 0,$$

luego, en general, $a_n = 0$ lo cual indica que la EDO anterior no tiene como solución ninguna serie de potencias. Es fácil ver que la solución se puede buscar en la forma $y(x) = x^r$, para $x > 0$. El caso $x < 0$ se deduce fácilmente de éste sin más que hacer el cambio $x = -z$,

$z > 0$. Sustituyendo $y(x) = x^r$ en (5.4) tenemos que r ha de satisfacer la ecuación indicial $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. Sean r_1 y r_2 las soluciones de la ecuación indicial,

$$r_{1,2} = -\frac{p_0 - 1}{2} \pm \frac{\sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}}{2}.$$

Entonces se tienen los siguientes casos para $x > 0$

1. Caso $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 > 0$, $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$ (dos raíces reales y distintas)

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{5.5}$$

2. Caso $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0$, $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ (dos raíces reales iguales)

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \log(x), \qquad x > 0. \tag{5.6}$$

3. Caso $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 < 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ (dos raíces complejas). Sea $r_1 = a + bi$, entonces la solución es

$$y(x) = c_1 x^a \cos(b \log x) + c_2 x^a \operatorname{sen}(b \log x), \qquad x > 0. \tag{5.7}$$

Si queremos tener la solución también para $x < 0$ basta sustituir en las expresiones el valor de x por $|x|$.

Veamos que ocurre en el caso general. En este caso la *lógica* indica que quizá la solución tenga la forma[6]

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Entonces si sustituimos en la EDO (5.3) e igualamos potencias nos queda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k = 0,$$

de donde, al igualar la potencia x^r, se sigue que r ha de satisfacer la ecuación indicial $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, y además se deduce una relación de recurrencia para cada uno de los coeficientes a_n en la expresión de la serie. No obstante tenemos que ser cuidadosos pues puede ocurrir que la relación recurrente para los coeficientes a_n no tenga solución. En general se tiene el siguiente

Teorema 5.7 *Sea la EDO $x^2 y'' + x[xp(x)] + [x^2 q(x)]y = 0$, y las funciones $p(x)$ y $q(x)$ tales que $xp(x) = p_0 + p_1 x + \cdots$ y $x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots$ sean funciones analíticas en $x_0 = 0$. Dada la ecuación indicial $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, entonces las dos soluciones linealmente independientes soluciones de la EDO anterior son de la forma*

1. *Caso $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 > 0$, $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$ con $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$ (dos raíces reales y distintas que no difieran en un entero)*

$$y(x) = c_1 x_1^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + c_2 x_2^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \qquad x > 0. \tag{5.8}$$

[6] Recordar que estamos suponiendo $x_0 = 0$.

2. *Caso* $(p_0-1)^2-4q_0<0$, $r_1,r_2\in\mathbb{C}$,$r_2-r_1\notin\mathbb{Z}$ *(dos raíces complejas que no difieran en un entero). Sea* $r_1=a+bi$, *entonces la solución es*

$$y(x)=c_1x^a\cos(b\log x)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+c_2x^a\operatorname{sen}(b\log x)\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\qquad x>0. \tag{5.9}$$

3. *Caso* $(p_0-1)^2-4q_0=0$, $r_1=r_2\in\mathbb{R}$ *(dos raíces reales iguales)*

$$y(x)=c_1x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+c_2\left[\left(x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)\log x+x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\right],\qquad x>0. \tag{5.10}$$

4. *Caso* $(p_0-1)^2-4q_0=0$, $r_1=r_2-N\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{Z}$ *(dos raíces reales que difieren en un entero)*

$$y(x)=c_1x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+c_2\left[A\left(x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)\log x+x^{r_1+N}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\right],\qquad x>0, \tag{5.11}$$

donde A *es cierta constante que puede ser nula.*

En todos los casos las series convergen en un entorno de $x_0=0$.

Esta claro del teorema anterior que este caso es mucho más complicado que el anterior. Aquí sólo nos limitaremos a mostrar un ejemplo del primer caso por ser este el más sencillo.

5.3. La ecuación hipergeométrica de Gauss

Como ejemplo consideraremos la ecuación hipergeométrica de Gauss

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0. \tag{5.12}$$

Por sencillez asumiremos que $\gamma\notin\mathbb{Z}$.

Obviamente $x=0$ es un punto singular regular. En efecto, dividiendo por $x(1-x)$ tenemos

$$p(x)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)x}{x(1-x)},\qquad q(x)=\frac{-\alpha\beta}{x(1-x)},$$

luego

$$xp(x)=\gamma-(1+\alpha+\beta-\gamma)x+\cdots,\qquad x^2q(x)=-\alpha\beta x+\cdots,$$

entonces $p_0=\gamma$ y $q_0=0$ y la ecuación indicial es $r(r-1)+\gamma r=0$, de donde tenemos dos soluciones $r=0$ y $r=1-\gamma$. Como hemos supuesto que $\gamma\notin\mathbb{Z}$, entonces tenemos dos soluciones

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad y_2(x)=x^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Comencemos por la primera. Sustituyendo y_1 en (5.12) obtenemos

$$(n+1)(n+\gamma)a_{n+1}=[n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta]a_n,$$

por tanto,

$$a_n=\frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)}a_{n-1},\qquad n\geq 1.$$

Si denotamos por $(a)_n$ el producto

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad n \geq 1, \tag{5.13}$$

entonces obtenemos

$$a_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!},$$

por tanto

$$y(x) = {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} \alpha, \beta \\ \gamma \end{array} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{x^k}{k!}, \tag{5.14}$$

conocida como *función hipergeométrica de Gauss*. Es fácil comprobar que el radio de convergencia de la serie anterior es $R = 1$.

Si ahora sustituimos la segunda solución obtenemos

$$a_n = \frac{(n+\alpha-\gamma)(n+\beta-\gamma)}{n(n-\gamma+1)} a_{n-1}, \qquad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{(\alpha-\gamma+1)_n(\beta-\gamma+1)_n}{(2-\gamma)_n n!}, n \geq 1.$$

de donde tenemos

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} \alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1 \\ 2-\gamma \end{array} \middle| x \right).$$

Nóese que si $\gamma \in \mathbb{Z}$ entonces una de las soluciones deja de estar definida. En este caso hay que buscar la solución incluyendo el correspondiente término logarítmico.

5.4. Problemas

Problema 5.8 *Resuelve las EDOs siguientes usando series de potencias, si es posible, e indica la región de convergencia de las mismas*

1. $x^2y' = y + x^2 + 1$,
2. $xy' = 2y + xe^x$,
3. $y'' + 2y' + y = x$,
4. $(x^4 - 4)y'' + 3xy' + y = 0$.

Problema 5.9 *Sea la EDO* $(1 + x)y' = py$, $y(0) = 1$, $p \in \mathbb{R}$.

1. *Busca su solución en serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *y prueba que* $a_n = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)/n!$.
2. *Encuentra la región de validez de la dolución anterior.*
3. *Comprueba que la función* $y(x) = (1 + x)^p$ *es solución de la misma.*

Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad, en la región de convergencia de la serie tendremos

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n, \qquad p \in \mathbb{R},$$

que no es más que el teorema del binomio encontrado por Newton.

Problema 5.10 *Resolver las EDOs usando series alrededor del cero (punto regular)*

1. $(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$, *(EDO de Chebyshev)*
2. $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$, *(EDO de Legendre)*
3. $y'' - 2xy' + 2py = 0$, *(EDO de Hermite)*
4. $y'' + xy = 0$, *(EDO de Airy). Usando la solución de la EDO de Airy resolver la EDO* $y'' - xy = 0$.

Problema 5.11 *Prueba que la EDO de Euler*

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

se transforma, con el cambio $x = e^z$ *en una EDO con coeficientes constantes:*

$$ay''(z) + (b-a)y'(z) + cy(z) = 0.$$

Problema 5.12 *Resuelve las siguientes EDOs de Euler*

1. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$,
2. $x^2y'' + xy' - 5y = 0$,
3. $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$,
4. $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$.

Problema 5.13 *Resueve las siguientes EDOs alrededor de* $x = 0$ *(punto singular regular)*

1. $xy'' + (1-x)y' + py = 0$, *(EDO de Laguerre)*
2. $xy'' + (1+\alpha-x)y' + py = 0$, *(EDO de Laguerre generalizada)*
3. $x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0$, *(EDO de Bessel)*

Problema 5.14 *La EDO*

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

se denomina ecuación hipergeométrica de Gauss (aunque fue introducida por Euler en 1769). Encuentra dos soluciones linealmente independientes de la misma. Usando un cambio apropiado de variables demuestra que las soluciones de las EDO de Chebyshev y Legendre se pueden expresar en función de las soluciones de la EDO hipergeométrica de Gauss.

Problema 5.15 *Encuentra dos soluciones linealmente independientes de la EDO hipergeométrica confluente definida por*

$$xy'' + [c-x]y' - ay = 0, \qquad a, c \in \mathbb{R}.$$

6. Los polinomios ortogonales clásicos

6.1. La ecuación diferencial hipergeométrica.

Nuestro objetivo será estudiar los polinomios ortogonales clásicos definidos sobre el eje real los cuales vamos a definir como las soluciones polinómicas de la siguiente EDO

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{6.1}$$

donde σ y τ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente. Esta ecuación (6.1) usualmente se denomina *ecuación diferencial hipergeométrica* y sus soluciones y cumplen con la propiedad, conocida como *propiedad de hipergeometricidad*: *Si y es una solución de (6.1) sus* m*-ésimas derivadas $y^{(m)} \equiv y_m$ satisfacen una ecuación del mismo tipo.*

Teorema 6.1 *Si y es una solución de (6.1) sus* m*-ésimas derivadas $y^{(m)} \equiv y_m$ satisfacen la ecuación*

$$\begin{gathered}\sigma(x)y_m'' + \tau_m(x)y_m' + \mu_m y_m = 0,\\ \tau_m(x) = \tau(x) + m\sigma'(x), \quad \mu_m = \lambda + \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i'(x) = \lambda + m\tau'(x) + \tfrac{m(m-1)}{2}\sigma''(x)\ .\end{gathered} \tag{6.2}$$

La propiedad de hipergeometricidad es es muy importante pues nos permite encontrar una fórmula explícita para los polinomios que satisfacen la ecuación (6.1). Para ello usualmente se escriben (6.1) y (6.2) en su forma *simétrica o autoconjugada*:

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad [\sigma(x)\rho_m(x)y_m']' + \mu_m\rho_m(x)y_m = 0, \tag{6.3}$$

donde ρ y ρ_m son funciones de simetrización que satisfacen las ecuaciones diferenciales de primer orden (conocidas como ecuaciones de Pearson):

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad [\sigma(x)\rho_m(x)]' = \tau_m(x)\rho_m(x).$$

Conocida ρ encontramos, utilizando las ecuaciones anteriores, que

$$\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x). \tag{6.4}$$

Teorema 6.2 *Si para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\tau' + k\sigma''/2 \neq 0$, entonces para las soluciones polinómicas de la ecuación (6.2) se tiene la siguiente fórmula de Rodrigues:*

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{A_{nm}B_n}{\rho_m(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\rho_n(x)], \qquad B_n = \frac{P_n^{(n)}}{A_{nn}}, \tag{6.5}$$

$$A_{nm} = A_m(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}[\tau' + \tfrac{1}{2}(n+k-1)\sigma'']. \tag{6.6}$$

Además, el autovalor λ_n de (6.1) es

$$\lambda \equiv \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \tag{6.7}$$

Cuando $m = 0$ la fórmula (6.5) se convierte en la *fórmula de Rodrigues* para los polinomios clásicos

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{6.8}$$

Si imponemos unas sencillas condiciones adicionales se tiene que las soluciones de (6.1) son ortogonales dos a dos:

Teorema 6.3 *Supongamos que* $x^k\sigma(x)\rho(x)\Big|_{x=a,b} = 0$*, para todo* $k \geq 0$*. Entonces las soluciones polinómicas* P_n *de la ecuación (6.1) constituyen una SPO respecto a la función peso* ρ *definida por la ecuación* $[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)$*, o sea, se cumple que:*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \delta_{nm}d_n^2, \tag{6.9}$$

donde δ_{nm} *es el símbolo de Kronecker y* d_n *denota la norma de los polinomios* P_n*.*

Corolario 6.4 *Si* $(P_n)_n$ *es una familia de polinomios ortogonales respecto a* ρ *entonces para todo* k *entero con* $0 \leq k \leq n-1$ *se tiene que* $\displaystyle\int_a^b x^k P_n(x)\rho(x)dx = 0$*.*

Para calcular d_n^2, podemos utilizar la fórmula de Rodrigues que, sustituyéndola en (6.9) e integrando por partes, nos da:

$$d_n^2 = B_n(-1)^n n! a_n \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx. \tag{6.10}$$

Una consecuencia de la propiedad de ortogonalidad es el siguiente

Teorema 6.5 *Los polinomios ortogonales satisfacen una relación de recurrencia a tres términos de la forma*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \tag{6.11}$$

donde

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{c_n - \alpha_n c_{n+1}}{a_{n-1}} - \frac{b_n}{a_{n-1}}\beta_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}, \tag{6.12}$$

siendo a_n*,* b_n *y* c_n *los coeficientes del desarrollo* $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \cdots$*, y* d_n *es la* norma *de los polinomios.*

Generalmente se impone que $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$, con lo que la sucesión de polinomios ortogonales queda determinada de forma única conocidas las sucesiones $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ y $(\gamma_n)_n$.

Para calcular los coeficientes principales a_n y b_n podemos usar la fórmula de Rodrigues para la $n-1$-ésima derivada de P_n: $P_n^{(n-1)}(x) = A_{nn-1}B_n\tau_{n-1}(x)$,de donde obtenemos la igualdad:

$$P_n^{(n-1)}(x) = n!a_n x + (n-1)!b_n = A_{nn-1}B_n\tau_{n-1}(x).$$

Luego,

$$a_n = \frac{B_n A_{nn}}{n!} = B_n \prod_{k=0}^{n-1}[\tau' + \tfrac{1}{2}(n+k-1)\sigma''], \qquad b_n = \frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} a_n. \tag{6.13}$$

Como un corolario de (6.11) se obtiene la conocida fórmula de Christoffel-Darboux:

Teorema 6.6 *Si* $(P_n)_n$ *es una sucesión de polinomios ortogonales que satisface la relación de recurrencia a tres términos (6.11). Entonces se cumple que:*

$$\mathrm{Ker}_n(x,y) \equiv \sum_{m=0}^{n} \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y}, \quad n \geq 1\,. \tag{6.14}$$

Si hacemos tender $y \to x$, obtenemos la fórmula *confluente* de Christoffel-Darboux:

$$\mathrm{Ker}_n(x,x) \equiv \sum_{m=0}^{n} \frac{P_m^2(x)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2}[P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)] \quad n \geq 1\,. \tag{6.15}$$

De la fórmula de Rodrigues se deducen una serie de consecuencias muy interesantes

1. τ es un polinomio de grado exactamente uno.
2. Tomando $m = 1$ en la fórmula (6.5) se deduce que
$$P'_n(x) = \frac{-\lambda_n B_n}{\bar{B}_{n-1}} \bar{P}_{n-1}(x), \tag{6.16}$$
donde $\bar{P}_{n-1}$ denota al polinomio ortogonal respecto a la función peso $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.
3. Si escribimos la fórmula (6.5) para el polinomio de grado $n+1$ obtenemos una fórmula de diferenciación
$$\sigma(x)P'_n(x) = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n}\left[\tau_n(x)P_n(x) - \frac{B_n}{B_{n+1}}P_{n+1}(x)\right]. \tag{6.17}$$
de la cual se deduce una relación de estructura
$$\sigma(x)P'_n(x) = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n P_n(x) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{6.18}$$
donde
$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n}\left[\alpha_n\tau'_n - \frac{B_n}{B_{n+1}}\right], \quad \tilde{\beta}_n = \frac{\lambda_n}{n\tau'_n}\left[\beta_n\tau'_n + \tau_n(0)\right], \quad \tilde{\gamma}_n = \frac{\lambda_n\gamma_n}{n}. \tag{6.19}$$
4. Si definimos $Q_n(x) \equiv \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$, entonces los polinomios ortogonales mónicos $P_n(x) = x^n + \cdots$, soluciones de la ecuación (6.1), satisfacen la siguiente relación de estructura:
$$P_n(x) = Q_n + \delta_n Q_{n-1} + \epsilon_n Q_{n-2}. \tag{6.20}$$

6.2. Los Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

6.2.1. Parámetros Principales.

Comenzaremos escribiendo los principales parámetros de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos clásicos, es decir, tales que su coeficiente principal $a_n = 1$, i.e., $P_n(x) = x^n + b_n x^{n-1} + \cdots$. Éstos se pueden clasificar en tres grandes familias en función del grado del polinomio σ (τ siempre es un polinomio de grado 1). Cuando σ es un polinomio de grado cero los polinomios correspondientes se denominan *Polinomios de Hermite* $H_n(x)$, cuando σ es de grado 1, *Polinomios de Laguerre* $L_n^\alpha(x)$ y cuando σ es de grado 2, *Polinomios de Jacobi* $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, respectivamente. En las tablas 3 y 4 están representados los principales parámetros de dichas familias, en las cuales $(a)_n$ denota al símbolo de Pochhammer (6.30).

Tabla 3: Clasificación de las SPO Clásicas.

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
$\sigma(x)$	1	x	$1-x^2$
$\tau(x)$	$-2x$	$-x+\alpha+1$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$
λ_n	$2n$	n	$n(n+\alpha+\beta+1)$
$\rho(x)$	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$ $\alpha>-1$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $\alpha,\beta>-1$
$\rho_n(x)$	e^{-x^2}	$x^{n+\alpha}e^{-x}$	$(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}$

6.2.2. Representación hipergeométrica.

De la fórmula de Rodrigues, o usando el método de las series de potencias, (6.5) se puede obtener la representación de los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi en términos de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ definida en el caso más general de forma:

$$ {}_p\mathrm{F}_q\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_p \\ b_1, b_2, ..., b_q \end{array} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}. \tag{6.21} $$

De esta manera encontramos que:

$$ H_{2m}(x) = (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m {}_1\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -m \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| x^2 \right), \; H_{2m+1}(x) = (-1)^m \left(\frac{3}{2}\right)_m x \, {}_1\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -m \\ \frac{3}{2} \end{array} \middle| x^2 \right), \tag{6.22} $$

$$ L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \alpha+1 \end{array} \middle| x \right), \tag{6.23} $$

$$ P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{2^n (\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n} {}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{array} \middle| \frac{1-x}{2} \right). \tag{6.24} $$

6.2.3. Casos particulares.

1. Los polinomios de Legendre $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$.

2. Los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n(x)$:

$$ T_n(x) = P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos[n \text{ arccos } (x)]. $$

3. Los polinomios de Chebyshev de segunda especie $U_n(x)$:

$$ U_n(x) = P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\text{sen}[(n+1) \text{ arccos } (x)]}{\text{sen}[\text{ arccos } (x)]}. $$

4. Los polinomios de Gegenbauer $G_n^\lambda(x)$:

$$ G_n^\gamma(x) = P_n^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x), \quad \gamma > -\tfrac{1}{2}. $$

Tabla 4: Parámetros de las SPO Mónicas ($a_n = 1$).

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
B_n	$\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$(-1)^n$	$\dfrac{(-1)^n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}$
b_n	0	$-n(n+\alpha)$	$\dfrac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}$
d_n^2	$\dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^n}$	$\Gamma(n+\alpha+1)n!$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+2n+1}n!\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)_n^2}$
α_n	1	1	1
β_n	0	$2n+\alpha+1$	$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}$
γ_n	$\dfrac{n}{2}$	$n(n+\alpha)$	$\dfrac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$
$\tilde{\alpha}_n$	0	0	$-n$
$\tilde{\beta}_n$	0	n	$\dfrac{2(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}$
$\tilde{\gamma}_n$	n	$n(n+\alpha)$	$\dfrac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$
δ_n	0	n	$\dfrac{2n(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}$
ϵ_n	0	0	$-\dfrac{4n(n-1)(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$

6.2.4. Otras características.

Como consecuencia de las fórmulas anteriores podemos obtener los valores de los polinomios en los extremos del intervalo de ortogonalidad.

$$\begin{gathered} H_{2m}(0) = \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}m!}, \quad H_{2m+1} = 0, \qquad L_n^\alpha(0) = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ P_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{2^n(\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = \frac{(-1)^n 2^n(\beta+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}. \end{gathered} \tag{6.25}$$

Utilizando la fórmula (6.16) encontramos las ecuaciones ($\nu = 1, 2, 3, ..., n = 0, 1, 2, ...$):

$$(H_n(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n-\nu)!}H_{n-\nu}(x), \qquad (L_n^\alpha(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n-\nu)!}L_{n-\nu}^{\alpha+\nu}(x), \tag{6.26}$$

$$(P_n^{\alpha,\beta}(x))^{(\nu)} = \frac{n!}{(n-\nu)!}P_{n-\nu}^{\alpha+\nu,\beta+\nu}(x), \tag{6.27}$$

donde $(P_n(x))^{(\nu)}$ denota la $\nu-$ésima derivada de $P_n(x)$.

Directamente a partir de las correspondientes EDOs se puede probar que los polinomios de Hermite y Gegenbauer se relacionan con los de Hermite y Jacobi, respectivamente mediante las siguientes relaciones:

$$H_{2m}(x) = L_m^{-\frac{1}{2}}(x^2), \quad H_{2m+1}(x) = xL_m^{\frac{1}{2}}(x^2) \ ,$$

$$G_{2m}^{\gamma}(x) = P_{2m}^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^m} P_m^{\gamma-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(2x^2-1), \tag{6.28}$$

$$G_{2m+1}^{\gamma}(x) = P_{2m+1}^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^m} x\, P_m^{\gamma-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2x^2-1).$$

Además, de la fórmula de Rodrigues se puede encontrar la siguiente propiedad de simetría para los polinomios de Jacobi:

$$P_n^{\beta,\alpha}(-x) = (-1)^n P_n^{\alpha,\beta}(x). \tag{6.29}$$

Apéndice: La función Gamma de Euler

Una de las funciones que con más frecuencia encontraremos es la función Gamma de Euler ó Γ, definida, en general, mediante la integral de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Esta función fue definida por Euler en 1729 como límite de un producto de donde se puede deducir la integral anterior (considerada también por Euler en 1772) aunque su nombre y notación se deben a Legendre quien la estudió en detalle en 1814. En particular, Euler probó que

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} z^n.$$

Dicha función satisface las ecuaciones funcionales

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z},$$

y además, cumple la propiedad

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

Utilizando las expresiones anteriores se concluye que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Además,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)\cdots(2)(1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente fórmula asintótica de la función Γ es de gran utilidad

$$\Gamma(ax+b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-ax}(ax)^{ax+b-\frac{1}{2}}, \quad x >> 1,$$

donde por $a(x) \sim b(x)$ entenderemos $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a(x)}{b(x)} = 1$. Otra *función* muy relacionada con la función Γ es el símbolo de Pochhammer $(a)_k$ (5.13)

$$(a)_0 = 1, \ \ (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), \ k = 1,2,3,\dots \ . \tag{6.30}$$

Es muy sencillo comprobar que

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Finalmente, definiremos los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!}.$$

6.3. Los momentos de los polinomios clásicos

En este apartado vamos a considerar brevemente una forma de obtener una relación para los momentos.

Teorema 6.7 *Sea $\mu \in \mathbb{C}$. Se definen los* momentos *como*

$$C_{\nu,\mu}(z) = \int_a^b (s-z)^\mu \rho_\nu(s) ds. \tag{6.31}$$

Si se cumple la condición de frontera

$$\sigma(s)\rho_\nu(s)(s-z)^\mu \Big|_a^b = 0, \tag{6.32}$$

entonces los momentos generalizados verifican la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$\mu\sigma(z)C_{\nu,\mu-1}(z) + [\tau_\nu(z) + \mu\sigma'(z)]\, C_{\nu,\mu}(z) + \left(\tau'_\nu + \frac{1}{2}\mu\sigma''\right) C_{\nu,\mu+1}(z) = 0. \tag{6.33}$$

En particular, para $\nu = 0$, $\mu = p \in \mathbb{N}$, $z = 0$ obtenemos, de (6.33), la siguiente relación de recurrencia a dos términos

$$\mu\sigma(0)C_{p-1} + [\tau(0) + p\sigma'(0)]C_p + \left(\tau' + \frac{1}{2}p\sigma''\right) C_{p+1} = 0. \tag{6.34}$$

para los momentos clásicos

$$C_p \equiv C_{0,p}(0) = \int_a^b s^p \rho(s) ds.$$

Vamos a aplicar los resultados anteriores a los polinomios clásicos.

Para obtener los momentos de los polinomios de Jacobi usaremos las expresiones (6.33) y (6.34).

Ejemplo 6.8 *Calcula los momentos de los polinomios de Laguerre y Hermite usando el método anterior.*

En el caso Laguerre tenemos que la relación de recurrencia (6.34) es

$$(\alpha+n+1)C_n - C_{n-1} = 0, \quad \text{luego} \quad C_n = (\alpha+1)_n C_0, \qquad C_0 = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha+1),$$

de donde deducimos que $C_n = \Gamma(\alpha+n+1)$.

Finalmente, para los polinomios de Hermite tenemos que $\sigma(0) \neq 0$, así que tenemos que usar (6.33) cuando $z = 0$. Ello nos conduce a la relación $pC_{p-1} - 2C_{p+1} = 0$. De ella deducimos que, como $C_1 = 0$, entonces todos los momentos impares son nulos, lo cual es evidente ya que la función peso es una función par. Además, como $C_0 = \sqrt{\pi}$, entonces

$$C_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi} = \frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\sqrt{\pi}, \qquad C_{2m+1} = 0.$$

6.4. Las funciones generatrices

El objetivo de este apartado es encontrar las funciones generatrices de los polinomios clásicos. En general el problema se puede plantear como sigue: Dada una sucesión númerica $(A_n)_n$ y una sucesión de polinomios $(P_n)_n$ encontrar una función $\Phi(x,t)$ tal que,

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)t^n. \tag{6.35}$$

Obviamente la serie anterior puede no converger prefijado un valor cualquiera del parámetro t, por ello asumiremos que t es lo suficientemente pequeño para que la serie converja en una región de las x lo suficientemente amplia.

Para los polinomios clásicos se tienen las siguientes identidades.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}H_n(x)t^n=e^{2xt-t^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}L_n^{\alpha}(x)t^n=\frac{e^{-\frac{tx}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}, \tag{6.36}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha+\beta+1)_n}{n!}P_n^{\alpha,\beta}(x)t^n=\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-2t+R)^{\alpha}(1+2t+R)^{\beta}}, \tag{6.37}$$

con $R=\sqrt{1+4t(t+x)}$.

Para probar las mismas usualmente se hace uso del teorema integral de Cauchy. No obstante daremos la prueba de las mismas usando métodos más "elementales".

Comenzaremos con los polinomios de Hermite al ser éstos los más sencillos. Daremos tres pruebas distintas para mostrar los distintos *trucos* que se suelen usar.

Caso Hermite $H_n(x)$: Primera prueba

Sea $\Phi(x,t)=e^{2xt-t^2}$. Al ser esta función analítica en $\mathbb{R}$ podemos usar la serie de Taylor

$$\Phi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n\Phi}{\partial t^n}\right)\Bigg|_{t=0}t^n.$$

Pero

$$\frac{\partial^n\Phi}{\partial t^n}\Bigg|_{t=0}=e^{x^2}\frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial t^n}\Bigg|_{t=0}=\left\{\begin{array}{c}\xi=x-t\\ \\ d\xi=-dx\end{array}\right\}(-1)^n e^{x^2}\frac{\partial^n e^{-\xi^2}}{\partial \xi^n}\Bigg|_{\xi=x}=\frac{(-1)^n}{B_n}H_n(x),$$

luego

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}H_n(x)t^n.$$

Caso Hermite $H_n(x)$: Segunda prueba

Vamos a usar la relación de recurrencia a tres términos

$$H_{n+1}(x)+\frac{n}{2}H_{n-1}(x)-xH_n(x)=0.$$

Multiplicamos por $2^{n+1}t^n/n!$

$$\frac{2^{n+1}}{n!}H_{n+1}(x)t^n + \frac{2^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x)t^n - x\frac{2^{n+1}}{n!}H_n(x)t^n = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}H_{n+1}(x)t^{n+1} + 2t\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}H_{n-1}(x)t^{n-1} - 2x\frac{2^n}{n!}H_n(x)t^n = 0,$$

y sumamos en $n = 0$ hasta ∞ y usamos que $1/(-1)! = 0$ y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}H_{n+1}(x)t^{n+1} + 2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}H_{n-1}(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}H_n(x)t^n = 0.$$

Ahora bien, como $\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}H_n(x)t^n$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) + 2(t-x)\Phi(x,t) = 0,$$

cuya solución es $\Phi(x,t) = e^{2xt-t^2}$.

Caso Hermite $H_n(x)$: Tercera prueba

Vamos a dar una tercera prueba que escencialmente es la inversa de la anterior, es decir a partir de la expresión explícita de la función generatríz deducimos una relación de recurrencia para los correspondientes polinomios (en este caso los de Hermite). La razón fundamental es que este método es muy general y nos permitirá probar el resto de las expresiones.

Sea la función generatríz $\Phi(x,t) = e^{2xt-t^2}$ que escribiremos mediante la expresión

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}g_n(x)t^n, \tag{6.38}$$

donde $(g_n)_n$ es una sucesión de polinomios a determinar.

Un sencillo cálculo nos muestra que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t) = (2x-2t)e^{2xt-t^2} = 2(x-t)\Phi(x,t).$$

De aquí deducimos que $\Phi(x,0) = 1$ y $\Phi_t(x,0) = 2x$, por tanto, usando el desarrollo en serie de Taylor en t para $\Phi(x,t)$ y comparándolo con (6.38) deducimos que $g_0(x) = 1$ y $g_1(x) = x$. Ahora sustituimos (6.38) en la ecuación diferencial anterior lo que nos da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}g_n(x)nt^{n-1} - 2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}g_n(x)t^n = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}g_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}g_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!}g_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Igualando coeficientes de las potencias de t a cero tenemos

$$t^0: \quad 2g_1(x) - 2xg_0(x) = 0,$$

$$t^1: \quad 2g_2(x) - 4xg_1(x) + 2g_0(x) = 0,$$

$$t^n: \quad 2g_{n+1}(x) - 2xg_n(x) + ng_{n-1}(x) = 0.$$

Ahora bien, como $g_0(x) = 1 = H_0(x)$ y $g_1(x) = x = H_1(x)$, entonces comparando las relaciones anteriores con la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios mónicos de Hermite obtenemos que $g_n(x) = H_n(x)$ que era lo que pretendíamos probar.

6.5. Problemas

Problema 6.9 *Calcula todas las carácterísticas de los polinomios clásicos que aparecen en la tabla 4.*

Problema 6.10 *Probar la ortogonalidad de las $k-$ésimas derivadas de los polinomios hipergeométricos $y_k \equiv P_n^{(k)}$, es decir,*

$$\int_a^b P_n^{(k)}(x) P_m^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \delta_{nm} d_{kn}^2. \tag{6.39}$$

Problema 6.11 *Prueba que los polinomios núcleos satisfacen la siguiente propiedad* reproductora

$$\int_a^b p(x) \mathrm{Ker}_n(x,y) dx = p(y), \qquad \forall p(x) \in \mathbb{P}_n. \tag{6.40}$$

Problema 6.12 *Encontrar la relación de recurrencia para los momentos $C_n := C_{0,n}(0)$ de los polinomios de Jacobi. Nótese que*

$$C_0 = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Hágase lo mismo pero para los momentos $C_n' := C_{0,n}(1)$, es decir, si en vez de sustituir en (6.33) $z = 0$ sustituimos el valor $z = 1$.

Un caso de especial relavancia son los polinomios de Gegenbauer que corresponden al caso $\alpha = \beta = \gamma - 1/2$. Encontrar la relación de recurrencia para los momentos $C_n := C_{0,n}(0)$ en este caso y resuélvela. A partir de ésta encuentra los momentos de los polinomios de Legendre $P_n(x) = P_n^{0,0}(x)$, los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n(x) = P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x)$ y los polinomios de Chebyshev de segunda especie $U_n(x) = P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)$, respectivamente.

Problema 6.13 *Demuestra que la función generatríz para los polinomios de Laguerre viene dada por (6.36). Sean los polinomios de Gegenbauer $C_n^\gamma(x) := P_n^{\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}}(x)$ que son un caso particular de los polinomios de Jacobi. Prueba que en este caso*

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\gamma} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n(\gamma)_n}{n!} C_n^\gamma(x) t^n, \tag{6.41}$$

donde $(\gamma)_n$ es el símbolo de Pocchamer. Como casos particulares deducir la de los polinomios de Chebychev de primera y segunda especie y la de los polinomios de Legendre.

Problema 6.14 *Prueba las relaciones*

$$P_{n-1}^{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{(2n+\alpha+\beta)(1-x)}{2n(\alpha+n)}\frac{d\,P_n^{\alpha,\beta}}{dx}(x) + \frac{(2n+\alpha+\beta)}{2(\alpha+n)}P_n^{\alpha,\beta}(x), \tag{6.42}$$

$$P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{(2n+\alpha+\beta)(x+1)}{2n(\beta+n)}\frac{d\,P_n^{\alpha,\beta}}{dx}(x) - \frac{(2n+\alpha+\beta)}{2(\beta+n)}P_n^{\alpha,\beta}(x). \tag{6.43}$$

Problema 6.15 *Los polinomios núcleos* $\mathrm{Ker}_{n-1}(x,y)$ *se definen mediante la expresión*

$$\mathrm{Ker}_{n-1}(x,y) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2}.$$

Usando la fórmula de Christoffel-Darboux (6.14), los valores en los extremos (6.25) y las fórmulas de diferenciación (6.17), prueba las siguentes fórmulas:

- *Núcleos de los polinomios de Hermite:*

$$\mathrm{Ker}_{2m-1}^{H}(x,0) = \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{\pi}(m-1)!}\;L_{m-1}^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^{m-1}}{2\sqrt{\pi}(m-1)!}\frac{H'_{2m}(x)}{x},$$

$$\mathrm{Ker}_{2m}^{H}(x,0) = \frac{(-1)^{m}}{\sqrt{\pi}(m)!}\;L_{m}^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{(-1)^{m}}{\sqrt{\pi}(m)!}\frac{H_{2m}(x)}{x},$$

$$\mathrm{Ker}_{2m-1}^{H}(0,0) = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} = \frac{(2m-1)!}{2^{2m-2}\sqrt{\pi}(m-1)!^2},\quad \mathrm{Ker}_{2m}^{H}(0,0) = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}\sqrt{\pi}\,m!^2}.$$

- *Núcleos de los polinomios de Laguerre:*

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{L}(x,0) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha+1)n!}\;(L_n^{\alpha})'(x),\quad \mathrm{Ker}_{n-1}^{L}(0,0) = \frac{(\alpha+1)_n}{\Gamma(\alpha+2)(n-1)!}.$$

- *Núcleos de los polinomios de Jacobi:*

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(x,-1) = \eta_n^{\alpha,\beta}\tfrac{d}{dx}P_n^{\alpha-1,\beta}(x) = n\eta_n^{\alpha,\beta}P_{n-1}^{\alpha,\beta+1}(x), \tag{6.44}$$

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(x,1) = (-1)^{n+1}\eta_n^{\beta,\alpha}\tfrac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta-1}(x) = n(-1)^{n+1}\eta_n^{\beta,\alpha}P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \tag{6.45}$$

donde por $\eta_n^{\alpha,\beta}$ *y* $\eta_n^{\beta,\alpha}$ *denotaremos las cantidades*

$$\eta_n^{\beta,\alpha} = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta+n}n!\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+1)},\qquad \eta_n^{\beta,\alpha}\frac{(-1)^{n-1}\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta+n}n!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+n)}.$$

Usando (6.44)-(6.45) tenemos

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(-1,-1) = \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}(n-1)!\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+n)},$$

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(-1,1) = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}(n-1)!\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Utilizando la relación de simetría (6.29) para los polinomios de Jacobi prueba que

$$\mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\alpha,\beta}(1,1) = \mathrm{Ker}_{n-1}^{J,\beta,\alpha}(-1,-1).$$

7. El teorema de existencia y unicidad para las EDOs

Vamos a resolver uno de los problemas pendientes más importantes: la existencia y unicidad de soluciones para una EDO de primer orden. Sea el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{7.1}$$

En el apartado **2.7.1** de aproximaciones númericas vimos algunos ejemplos donde la solución o bien no era única o bien no correspondía con la solución exacta. Vamos a dar aquí algunas condiciones bajo las cuales podemos garantizar que el PVI (7.1) tiene solución única.

Lo primero que asumiremos es que la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $\mathcal{R}$ definido por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}, \qquad a, b > 0. \tag{7.2}$$

Proposición 7.1 *El PVI (7.1) es equivalente a la siguiente ecuación integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{7.3}$$

Definición 7.2 *Diremos que una función $f(x, y)$ es de la clase de Lipschitz o lipschitziana (en la variable y) en $\mathcal{R}$ si existe cierta constante positiva $K > 0$ tal que para todos $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(x, z) \in \mathcal{R}$ se cumple*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le K|y - z|. \tag{7.4}$$

Es fácil comprobar que toda función $f(x, y)$ de la clase de Lipschitz según la definición anterior es continua en y. Además, una condición suficiente para que una función $f(x, y)$ sea de la clase de Lipschitz es que su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ sea continua en $\mathcal{R}$.

Definición 7.3 *Dada una función $u(x)$ definida en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$, definiremos la norma de $u(x)$ a la cantidad*

$$\|u\| = \sup_{x \in I} |u(x)|.$$

Para la norma tenemos la desigualdad evidente $\|u\| \ge 0$, y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u(x) = 0$ en I. Además, se tiene la desigualdad triangular

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|. \tag{7.5}$$

Obviamente si $u(x)$ es continua $\|u\| < +\infty$.

Proposición 7.4 *(Teorema de unicidad local de soluciones)*
Sea $f(x, y)$ una función de la clase de Lipschitz con constante K y sea $d \in (0, 1/K)$. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones del PVI (7.1) definidas en $I_d = \{x : \ |x - x_0| < d\}$ tales que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, entonces $y_1(x) = y_2(x)$ en todo I_d.

Sea

$$M = \max_{(x,y) \in \mathcal{R}} |f(x, y)|.$$

Como f es continua en $\mathcal{R}$, M siempre está definida.

Sea $y_0(x)$ una función continua definida en un entorno de x_0 tal que la imagen de $y_0(x)$ esté contenida en $\mathcal{R}$. Vamos a definir una sucesión de funciones $y_n(x)$ de la siguiente forma

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_n(\xi))d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{7.6}$$

La sucesión anterior se conoce como sucesión de Picard.

Proposición 7.5 *Sea $y_0(x)$ una función continua definida en $I_d = \{x : |x - x_0| < d = \text{mín}(a, b/M)\}$ tal que su imagen esté contenida en $\mathcal{R}$. Entonces, para todo $n \geq 0$, las imágenes de $y_n(x)$ están contenidas en $\mathcal{R}$.*

Proposición 7.6 *(Teorema de existencia local de soluciones)*
Sea $y_0(x)$ una función continua definida en $I_d = \{x : |x - x_0| < d = \text{mín}(a, b/M, 1/K)\}$ tal que su imagen esté contenida en $\mathcal{R}$, i.e., $|y_0(x) - y_0| \leq b$. Entonces, la sucesión de Picard (7.6) converge cuando n tiende a infinito a una función $y(x)$ que es solución del PVI (7.1) en I_d.

Corolario 7.7 *(Teorema local de existencia y unicidad)*
Sea el PVI (7.1) con f lipschitziana de constante K en $\mathcal{R}$ (7.2), y $M = \text{máx}_{(x,y)\in\mathcal{R}} |f(x, y)|$. Entonces, el PVI (7.1) tiene solución única en el intervalo $I_d = \{x : |x - x_0| < d = \text{mín}(a, b/M, 1/K)\}$, es decir existe una única función $y(x)$ tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$.

Los teoremas anteriores son sólo condiciones suficientes. Por ejemplo si consideramos la EDO lineal $y' = y$ sabemos que su solución existe y es única en todo $\mathbb{R}$ (es la exponencial) sin embargo si escogemos $x \in \mathbb{R}$ cualquiera y tomamos $b > 0$ cualquiera tenemos $f(x, y) = y$, luego f es lipschitziana con constante $K = 1$, $M = b$, y el teorema anterior nos garantiza sólo la solución en el intervalo $I_d = \{x : |x - x_0| < d = \text{mín}(a, b/b, 1/1) = 1\}$.

Como último ejemplo veamos el caso de la EDO $y' = 1 + y^2$ con $y(0) = 0$. En este caso la solución es $y = \tan x$ definida sólo en $[0, \pi/2)$. Como $f(x, y) = 1 + y^2$, entonces

$$|f(x, y) - f(x, z)| = y^2 - z^2 = |y + z||y - z|.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ por ejemplo. Escojamos un valor cualquiera para y, digamos que $|y| \leq b > 0$. Entonces $K = 2b$ y $M = 1 + b^2$, por tanto $d = \text{mín}(a, b/M, 1/K) = \text{mín}(a, b/(1 + b^2), 1/b)$. Ahora bien, $\text{máx}\, b/(1 + b^2) = 1/2$ y se alcanza en $b = 1$, por lo que como mucho asegurar que la solución existe en el intervalo $|x| < 1/2$. Nótese que en este caso el teorema es útil pues para $x > 1/2$ no nos garantiza la existencia de la solución como ocurre en la práctica.

El procedimiento anterior es fácilmente extensible a sistemas. Para ello basta definir una norma en $\mathbb{R}^N$ y el valor absoluto de un vector. Para este último podemos usar la definición $|Y(x)| = \sum_{k=1}^{N} |y_k|$. Si ahora usamos, por ejemplo, la norma

$$\|Y\| = \sum_{k=1}^{N} \|y_k\|,$$

entonces las demostraciones anteriores se adaptan perfectamente para el caso general. Nótese que con esta elección se tiene que si $|Y(x)| \leq M$ entonces $\|Y\| \leq NM$. Las correspondientes demostraciones se dejan como ejercicio.

7.1. Problemas

Problema 7.8 *Prueba las propiedades anteriores para la norma $\|u\|$.*

Problema 7.9 *Sea la EDO $y' = x - y^2$ con $y(0) = 0$. Encuentra el intervalo donde se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución. Encuentra las tres primeras aproximaciones de la solución.*

Problema 7.10 *Prueba que la solución de cada uno de los siguientes PVI existe en el intervalo indicado*

1. $y' = y^2 + \cos x^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1/2]$
2. $y' = y^3 + e^{-5x}$, $y(0) = 2/5$, $x \in [0, 3/10]$
3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1/2]$

Problema 7.11 *Encuentra las tres primeras iteraciones de la sucesión de Picard para el PVI* $y' = y^2 + e^x$, $y(0) = 0$.

Problema 7.12 *Encuentra las cuatro primeras iteraciones de la sucesión de Picard para el PVI* $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. *Compáralas con la solución exacta.*

8. La transformada de Laplace

Definición 8.1 *Sea f una función definida en $[0,\infty)$. La transformada de Laplace $\mathfrak{L}[f]$ o $\mathcal{F}(t)$ es la transformada integral*

$$\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx, \tag{8.1}$$

donde la integral se entiende en el sentido impropio, o sea

$$\int_0^\infty e^{-tx} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-tx} f(x)dx.$$

Definición 8.2 *Diremos que una función f es de orden exponencial si existen dos constantes no negativas c y M tales que $|f(x)| \leq Me^{cx}$ para todo $x \geq 0$.*

Teorema 8.3 *Si f es una función continua a trozos de orden exponencial entonces f tiene transformada de Laplace para todo t suficientemente grande.*

En la siguiente tabla incluimos algunas de las transformadas de Laplace más comunes incluida la de la función escalón $\chi_c(s)$ definida como 1 si $x \in [0,c]$ y 0 en el resto.

$f(x)$	$\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t)$
c	$\dfrac{c}{t}$
x^n	$\dfrac{n!}{t^{n+1}}$
e^{ax}	$\dfrac{1}{t-a}, \quad t > a$
$\operatorname{sen}(ax)$	$\dfrac{a}{t^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
$\operatorname{senh}(ax)$	$\dfrac{a}{t^2-a^2}, \quad t > a$
$\cosh(ax)$	$\dfrac{t}{t^2-a^2}, \quad t > a$
$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}, \quad t > 0$
$\chi_c(x)$	$\dfrac{e^{-ct}}{t}, \quad t > 0$

Tabla 5: Transformadas de Laplace de algunas funciones

Proposición 8.4 *Si $\mathcal{F}(t) = \mathfrak{L}[f](t)$ entonces*

1. $\mathfrak{L}[f'](t) = t\mathfrak{L}[f](t) - f(0) = t\mathcal{F}(t) - f(0)$ *y en general* $\mathfrak{L}[f^{(n)}](t) = t^n\mathcal{F}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k f^{(n-k-1)}(0)$

2. $\mathfrak{L}[e^{ax} f(x)](t) = \mathcal{F}(t-a)$

3. $\mathfrak{L}[xf(x)](t) = -\mathcal{F}'(t)$ *y en general,* $\mathfrak{L}[x^n f(x)](t) = (-1)^n \mathcal{F}^{(n)}(t)$.

4. $\mathfrak{L}[\chi_c(x)f(x-c)] = e^{-ct}\mathcal{F}(t)$.

5. Definiremos la convolución de dos funciones f *y* g *como la función* $h(x) = (f * g)(x)$ *definida por*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-z)g(z)dz. \tag{8.2}$$

Entonces, $\mathfrak{L}[(f * g)(x)](t) = \mathfrak{L}[f(x)](t) \cdot \mathfrak{L}[g(x)](t)$.

8.1. Problemas

Problema 8.5 *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones de la tabla 8.*

Problema 8.6 *Calcula las transformadas de Laplace de las funciones* $x\cos(\omega x)$ *y* $x\,\mathrm{sen}(\omega x)$. *Usando lo anterior encuentra la transformada de las funciones*

$$\frac{t^2}{(t^2+\omega^2)^2}, \qquad \frac{1}{(t^2+\omega^2)^2}$$

Problema 8.7 *Usando los resultados del problema anterior encuentra, usando la transformada de Laplace la solución de la EDO*

$$y'' + \omega^2 y = f_0\,\mathrm{sen}(\omega x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Problema 8.8 *Usa la transformada de Laplace para resolver las EDOs*

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
3. $y'' + y = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$,
4. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
5. $y'' + 2y' + y = [1 - \chi_{\pi/2}(x)]\,\mathrm{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
6. $y'' + 3y' + 2y = \chi_{\pi/2}(x)e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Resuelve los mismos problemas usando las técnicas aprendidas en el capítulo 4.

Problema 8.9 *La EDO* $xy'' + y' + xy = 0$, *se conoce como ecuación de Bessel de orden 0. Prueba que si* $\mathcal{Y}(t)$ *es la transformada de Laplace de la solución de esta EDO con* $y(0) = 1$, *prueba que entonces* $\mathcal{Y}$ *satisface la EDO*

$$(t^2+1)\mathcal{Y}'(t) + t\mathcal{Y}(t) = 0.$$

Prueba que la solución de la EDO anterior se puede expresar en serie como

$$\mathcal{Y}(t) = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{t^{2n+1}}.$$

A partir de lo anterior deduce la función $y(x)$ *solución de la EDO de Bessel.*

Problema 8.10 *Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes PVI de SEDO:*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 - \chi_\pi(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resuelve los mismos problemas usando las técnicas aprendidas en el capítulo 3.

A. Anexo: Cálculo de primitivas

Definición A.1 *Se dice que una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$ sobre un intervalo (a,b) si para todo x de (a,b) se tiene que $F'(x) = f(x)$.*

Por ejemplo, la función $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$ en todo $\mathbb{R}$ pues $(x^2)' = 2x$.

El siguiente teorema es una consecuencia trivial del teorema del valor medio de Lagrange.

Teorema A.2 *Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ dos primitivas de la función $f(x)$ en (a,b). Entonces, para todo x de (a,b), $F_1(x) - F_2(x) = const$. Es decir dada una función $f(x)$ sus primitivas difieren en una constante (en adelante denotaremos por C a una constante cualquiera).*

Definición A.3 *El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ definida en (a,b) se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se denota por $\int f(x)\,dx$. De manera que, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$,*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{A.1}$$

Mediante una simple derivación es sencillo comprobar el siguiente

Teorema A.4 *(Propiedades de la integral indefinida.)*

1. $\dfrac{d}{d\,x}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4. $\int [A \cdot f(x)]\,dx = A \int f(x)\,dx$

Teorema A.5 Tabla de Integrales

1. $\int 0\,dx = C$

2. $\int 1\,dx = x + C$

3. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1$

4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C, \qquad a > 0, a \neq 1$

6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

8. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotan} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen} x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

14. $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

15. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = \coth x + C$

A.1. Métodos de integración.

A.1.1. Integración por cambio de variable.

Teorema A.6 *Sea $t = \phi(x)$ una función derivable en x y sean $X = (a,b)$ el dominio y $T = \phi[(a,b)]$ la imagen de $\phi(x)$. Supongamos que sobre el conjunto T existe la primitiva de la función $g(t)$, o sea,*

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Entonces sobre todo el conjunto (a,b) la función $g[\phi(x)]\phi'(x)$ tiene una primitiva y además

$$\int g[\phi(x)]\phi'(x)\,dx = G[\phi(x)] + C.$$

Demostración: Basta notar que $(G[\phi(x)])' = G'[\phi(x)]\phi'(x) = g[\phi(x)]\phi'(x)$. ■

Ejemplo A.7

a) Calcular $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Para ello hacemos:

$$\int \cos(2x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ dy = 2\,dx \end{array} \right\} = \int \cos(y)\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} y + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$$

b) Calcular $\displaystyle\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla:

$$\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen}\,dx \end{array} \right\} = -\int e^y dy = -e^y + C = -e^{\cos x} + C$$

A.1.2. Integración por partes.

Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son derivables en un intervalo (a,b) y existe la primitiva de la función $v(x)u'(x)$ en (a,b). Entonces, sobre (a,b) existe la primitiva de $u(x)v'(x)$ y se cumple que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx, \tag{A.2}$$

o en forma diferencial

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{A.3}$$

Demostración: Para probarlo es suficiente notar que $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ y la propiedad 1 del teorema A.4.

Ejemplo A.8

a) Calcular $\int x^n \log x\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Utilicemos la integración por partes:

$$\int x^n \log x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = \log x, & du(x) = \frac{1}{x}\,dx \\ dv(x) = x^n\,dx, & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right\} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \int \frac{x^n}{n+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

b) Calcular $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$. Como la integral no es de la tabla es necesario convertirla en una de la tabla. Utilicemos la integración por partes:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = e^{ax}, & du(x) = ae^{ax}\,dx \\ dv(x) = \cos bx\,dx, & v(x) = \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

La integral $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ es de la misma forma que la original así que volveremos a aplicar integración por partes:

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) = e^{ax}, & du(x) = ae^{ax}\,dx \\ dv(x) = \operatorname{sen} bx\,dx, & u(x) = -\frac{1}{b}\cos bx \end{array} \right\} = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Juntando las dos fórmulas anteriores concluimos que

$$I = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I,$$

de donde, resolviendo la ecuación respecto a I obtenemos:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\operatorname{sen} bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Algunas de las integrales que pueden ser calculadas utilizando la integración por partes son:

1. Las integrales donde aparezcan las funciones $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\arccos x$, $\log \phi(x)$, potencias enteras de las funciones anteriores, entre otras donde tendremos que escoger como función $u(x)$ a alguna de las funciones anteriores (ver ejemplo a).

2. Las integrales $\int (ax+b)^n \operatorname{sen} cx\,dx$, $\int (ax+b)^n \cos cx\,dx$ y $\int (ax+b)^n e^{cx}\,dx$. Donde para encontrar las primitivas hay que utilizar la fórmula de integración por partes n veces tomando cada vez $u(x) = (ax+b)^n$, $u(x) = (ax+b)^{n-1}$, ..., respectivamente.

3. Las integrales de la forma $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$ y $\int \cos(\log x)\,dx$. Para encontrar las primitivas hay que denotar por I a cualquiera de las integrales anteriores, aplicar dos veces integración por partes y resolver la ecuación resultante respecto a I (ver ejemplo b).

A.2. Integración de funciones racionales.

Definición A.9 *Diremos que una función racional* $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *es* simple *si el grado del polinomio* $P_n(x)$ *es menor que el del polinomio* $Q_m(x)$*, o sea, si* $n < m$*.*

Si $n > m$ entonces podemos dividir los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ de tal forma que

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \qquad \text{donde} \qquad k < m.$$

Teorema A.10 *Supongamos que* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *es una fracción simple, y que el polinomio denominador se puede factorizar de la siguiente forma*

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}, \tag{A.4}$$

donde $x_1, ..., x_p$ *son las raíces reales de* $Q_m(x)$*, y los factores* $x^2 + p_i x + q_i$*,* $i = 1, .., k$ *no tienen raíces reales. Entonces, la fracción simple* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *se puede descomponer en las siguientes fracciones* elementales simples*:*

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \quad & \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}}{(x - x_1)^{n_1-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \\
& + \frac{B_{n_p}}{(x - x_p)^{n_p}} + \frac{B_{n_p-1}}{(x - x_p)^{n_p-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x - x_p)} + \cdots + \\
& + \frac{M_{m_1} x + N_{m_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \cdots + \\
& + \frac{L_{m_k} x + K_{m_k}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{L_1 x + K_1}{(x^2 + p_k x + q_k)},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

donde A_i*,* B_i*,* M_i*,* N_i*,* L_i *y* K_i *son ciertas constantes reales.*

Para determinar dichas constantes sumamos los términos de la derecha. Nótese que el denominador común coincide con (A.4) y el numerador es un polinomio de grado a lo sumo n. Luego comparamos el polinomio numerador que se obtiene al sumar las fracciones más simples en (A.5) con $P_n(x)$. Igualando los coeficientes de ambos obtendremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que podemos resolver para encontrar los coeficientes indeterminados A_i, B_i, M_i, N_i, L_i y K_i. No obstante es posible encontrar el coeficiente A_{n_i} de los sumandos correspondientes a uno de los ceros reales x_i, o sea, el A_{n_i} de

$$\frac{A_{n_i}}{(x - x_i)^{n_i}} + \frac{A_{n_i-1}}{(x - x_i)^{n_i-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x - x_i)},$$

utilizando la propiedad que

$$\lim_{x \to x_i} \frac{P_n(x)(x - x_i)^{n_i}}{Q_m(x)} = A_{n_i}. \tag{A.6}$$

Como consecuencia de lo anterior, si $Q_m(x)$ tiene m ceros reales y simples, o sea, si su factorización es de la forma

$$Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{m-1})(x - x_m), \tag{A.7}$$

entonces, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se puede descomponer en las fracciones *elementales simples*:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \quad \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(x - x_{m-1})} + \frac{A_m}{(x - x_m)}, \tag{A.8}$$

donde A_1,..., A_m se calculan por la fórmula

$$A_k = \lim_{x \to x_k} \frac{P_n(x)(x - x_k)}{Q_m(x)}, \qquad k = 1, 2, ..., m. \tag{A.9}$$

Teorema A.11 *(Primitivas de las fracciones simples más elementales)* [7]

$$\begin{aligned}
&1) \quad \int \frac{A}{x-a}\, dx = A \log|x-a| + C;\\
&2) \quad \int \frac{B}{(x-a)^k}\, dx = \frac{B}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \qquad k > 1;\\
&3) \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\, dx = \frac{M}{2} \log|x^2+px+q| + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Ejemplo A.12

a) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx$. Primero encontraremos las fracciones simples mas elementales:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Luego, utilizando (A.9) obtenemos

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -1, \qquad B = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = 2.$$

Finalmente, utilizando (A.10) obtenemos

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + C.$$

a) Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$. Primero encontraremos las fracciones simples mas elementales:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\\
&= \frac{A(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Para encontrar los coeficientes A, B, C, D igualamos los polinomios de los numeradores:

$$x = A(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Dos polinomios de grado 3 son iguales si los coeficientes de las potencias x^3, x^2, x y x^0 son iguales, por lo que igualando dichos coeficientes obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rr}
x^3: & B + C = 0\\
x^2: & A - B - 2C + D = 0\\
x^1: & B + C - 2D = 1\\
x^0: & A - B + D = 0
\end{array} \qquad \text{cuya solución es} \qquad \begin{array}{l}
A = \frac{1}{2}\\
B = 0\\
C = 0\\
D = -\frac{1}{2}
\end{array}$$

También es posible utilizar otra propiedad de los polinomios: dos polinomios de grado n que toman $n-1$ valores iguales en $n+1$ puntos dados son idénticamente iguales, es decir, si $P_n(x_k) = Q_n(x_k)$ para ciertos $x_1, ..., x_{n+1}$ (distintos entre si), entonces $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En nuestro

[7] Se supone que $x^2 + px + q$ no tiene raíces reales.

ejemplo es conveniente tomar como los x_k los ceros de los polinomios denominadores y luego el resto de los valores tomarlos los más sencillos posibles:

$$\begin{array}{lr} x=1: & A=\frac{1}{2} \\ x=-1: & 2A-4B-4C+4D=-1 \\ x=2: & 5A+5B+2C+D=2 \\ x=0: & A-B+D=0 \end{array} \quad \text{cuya solución es} \quad \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{array}$$

que coincide con la encontrada por el método anterior. Luego,

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\right]dx = -\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}\arctan x + C.$$

A.3. Integrales trigonométricas.

En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ las cuales se convierten en integrales racionales mediante la sustitución trigonométrica $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} t=\tan\frac{x}{2} & dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x=\dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\} = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

que es un integral de una función racional.

Ejemplo A.13

Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{\begin{array}{ll} t=\tan\frac{x}{2} & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\} = \int\frac{dt}{t} = \log|t|+C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

Existen varios tipos de integrales trigonométricas que se pueden *racionalizar* con cambios más sencillos. Ellas son las siguientes:

1. $\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x,\cos x)=-f(\operatorname{sen} x,\cos x)$, cambio $t=\cos x$
2. $\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx$, donde $f(\operatorname{sen} x,-\cos x)=-f(\operatorname{sen} x,\cos x)$, cambio $t=\operatorname{sen} x$
3. $\int f(\operatorname{sen} x,\cos x)\,dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x,-\cos x)=f(\operatorname{sen} x,\cos x)$, cambio $t=\tan x$

Ejemplo A.14

a) Calcular la integral $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Esta integral es del tipo 1. Luego,

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{\begin{array}{ll} t=\cos x & dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \operatorname{sen} x=\sqrt{1-t^2} & \cos x=t\end{array}\right\} = -\int\frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

que coincide con el resultado obtenido al utilizar la sustitución $t=\tan\frac{x}{2}$

b) Calcular la integral $\int \cos^3 x\, dx$. Esta integral es del tipo 2. Luego,

$$\int \cos^3 x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{sen} x & dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} & \operatorname{sen} x = t \end{array} \right\} = \int 1 - t^2\, dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

c) Calcular la integral $\int \tan^3 x\, dx$. Esta integral es del tipo 3. Luego,

$$\int \tan^3 x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan x & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int \left[t - \frac{t}{1+t^2} \right] dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x| + C.$$

A.4. Integrales irracionales.

En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$, $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$ y $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$.

A.4.1. Las integrales $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$ y $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$.

Estas integrales irracionales se convierten en integrales trigonométricas mediante los cambios:

1. $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, cambio $x = a \operatorname{sen} t$
2. $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, cambio $x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t}$
3. $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx$, cambio $x = a \tan t$

Ejemplo A.15

a) Calcular la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Esta integral es del tipo 1. Luego,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \operatorname{sen} t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2t + C,$$

pero, $\operatorname{sen} 2t = 2 sent \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, por tanto

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

b) Calcular la integral $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. Esta integral es del tipo 2. Luego,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\operatorname{sen} t} \\ dx = -\dfrac{a \cos t}{\operatorname{sen}^2 t} dt \end{array} \right\} = -a^2 \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^3 t} dt = \left\{ \begin{array}{ll} y = \cos t & dt = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ \operatorname{sen} t = \sqrt{1-y^2} & \cos t = y \end{array} \right\}$$

$$= a^2 \int \frac{y^2}{(1-y^2)^2} dt = \frac{a^2}{4} \int \left[\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1+y)} \right] dt = \frac{a^2}{4} \left[\frac{2y}{1-y^2} + \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| \right] + C,$$

pero, $y = \cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, por tanto

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{4}\log\left|\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

c) Calcular la integral $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$. Esta integral es del tipo 3. Luego,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a\tan t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = a^2 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \left\{ \begin{array}{ll} y = \operatorname{sen} t & dt = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ \cos t = \sqrt{1 - y^2} & \operatorname{sen} t = y \end{array} \right\}$$

$$= a^2 \int \frac{1}{(1 - y^2)^2} dt = \frac{a^2}{4} \int \left[\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)} \right] dt = \frac{a^2}{4} \left[\frac{2y}{1-y^2} + \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| \right] + C,$$

pero, $y = \operatorname{sen} t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, por tanto

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{4}\log\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x - \sqrt{x^2 + a^2}}\right| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

A.4.2. Las integrales $\int f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.

Las integrales del tipo

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

se racionalizan mediante el cambio $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Ejemplo A.16

Calcular la integral $\int \dfrac{d\,x}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $t = \sqrt[3]{x+1}$. Luego,

$$\int \frac{d\,x}{1 + \sqrt[3]{x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x+1} \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = 3\int \frac{t^2 d\,t}{1+t} = 3\int (t-1) dt + 3\int \frac{dt}{t+1} = \frac{3}{2} t(t-2) + 3\log(1+t) + C,$$

de donde, deshaciendo el cambio $t = \sqrt[3]{x+1}$, obtenemos

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}(\sqrt[3]{x+1} - 2) + 3\log(1 + \sqrt[3]{x+1}) + C.$$

El cálculo de primitivas es necesario para calcular integrales definidas de funciones continuas.

Teorema A.17 *Teorema fundamental del cálculo y Fórmula de Newton-Leibniz. Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces f tiene primitiva en $[a, b]$ y una de ellas es la función*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \qquad c \in (a, b). \tag{A.11}$$

Además, $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{A.12}$$

siendo $\Phi(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$.

B. Anexo: Álgebra lineal

B.1. Sistemas lineales y matrices.

Diremos que un sistema de n ecuaciones y m incógnitas es un sistema lineal si dicho sistema tiene la forma:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right. \tag{B.1}$$

Una matriz de dimensiones $n \times m$ no es más que una *"caja rectangular"* con n filas y m columnas.

El sistema de ecuaciones (B.1) está completamente caracterizado por su matriz asociada que no es más que la matriz en cuya fila i $(i = 1, 2, ..., n)$ están colocados los coeficientes a_{ij} $(j = 1, 2, ..., m)$ y el término independiente b_i correspondientes a la i-ésima ecuación del sistema (B.1). De esta forma la matriz asociada al sistema (B.1) tendrá la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

y se denomina *matriz ampliada del sistema*. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

se le denomina *matriz de coeficientes del sistema*.

Un sistema lineal de la forma (B.1) es *compatible* si existen los valores de $x_1, x_2, ..., x_m$ tales que se cumplan todas y cada una de las ecuaciones del sistema (B.1). Si existen dichos valores diremos que el sistema tiene solución. Si un sistema lineal de la forma (B.1) no tiene solución decimos que es un sistema *incompatible*. Un sistema compatible que tiene una única solución se llama *determinado* y si tiene infinitas soluciones *indeterminado*.

Dos sistemas de ecuaciones se denominan equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales se puede transformar en otro sistema equivalente mediante las siguientes operaciones elementales:

1. Intercambiar dos ecuaciones.

2. Multiplicar por una constante no nula una ecuación cualquiera.

3. Reemplazar una ecuación por la suma de ésta mas un múltiplo de cualquier otra ecuación.

Dada la equivalencia de los sistemas lineales con sus matrices asociadas (las matrices ampliadas) las operaciones anteriores tienen su análogo al operar con las matrices. De forma que a cada una le corresponden las siguientes operaciones por filas

1. Intercambiar dos filas.

2. Multiplicar por una constante no nula una fila cualquiera.

3. Reemplazar una fila por la suma de ésta mas un múltiplo de cualquier otra fila.

Las operaciones anteriores se denominan *operaciones elementales de filas.*

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si a cualquiera de ellas la podemos transformar en la otra utilizando sólo operaciones elementales de filas. Es importante recordar que las operaciones elementales de filas son *reversibles* y por tanto las operaciones elementales descritas no cambian la solución del sistema original de ecuaciones.

B.2. Formas escalonadas y el algoritmo de reducción por filas.

En adelante diremos que una fila es una fila no nula si tiene al menos un elemento diferente de cero. Definiremos elemento guía de una fila al primer elemento (por la izquierda) no nulo de la fila.

Diremos que una matriz está en *forma escalonada* si:

1. Todas las filas no nulas están por encima de las nulas.
2. El *elemento guía* de cada fila se encuentra siempre en una columna a la derecha del elemento guía de la fila anterior.
3. Debajo de cada elemento guía sólo puede haber ceros.

Las matrices escalonadas tienen típicamente la forma:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

donde $\blacksquare$ denota a los elementos guías de cada fila. Si exigimos ahora que los elementos guías sean todos iguales a 1, y que además sean los únicos elementos diferentes de cero de la columna entonces diremos que la matriz escalonada está en forma reducida. Utilizando las formas escalonadas anteriores (B.4) tenemos que sus correspondientes formas reducidas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

Cualquier matriz puede ser transformada mediante transformaciones elementales de fila en una matriz con forma escalonada no teniendo siempre ésta última una forma única. Por el contrario las formas escalonadas reducidas son únicas, es decir se cumple el siguiente teorema:

Teorema B.1 *Cualquier matriz es equivalente por filas a una única matriz con forma escalonada reducida.* $\blacksquare$

Una consecuencia del teorema anterior es que los elementos guías están siempre en la misma posición en cualquiera de las formas escalonadas obtenidas de una matriz dada mediante transformaciones elementales de fila. Dichas posiciones se denominan *pivotes* y las columnas donde se encuentran se denominan *columnas pivotes.* Así, por ejemplo

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \text{pivote} & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \uparrow & \end{array} \\
\text{columnas pivote}
\end{array} . \tag{B.6}
$$

Algoritmo de reducción por filas.

El algoritmo de reducción por filas consta de dos fases (partes). La primera consiste en transformar una matriz cualquiera en una equivalente por filas con forma escalonada. Esta fase se le denomina *fase hacia abajo* o *subproceso hacia abajo.* La segunda parte consiste en transformar la forma escalonada en la forma reducida. A la segunda parte se le denomina *fase hacia arriba* o *subproceso hacia arriba.*

Para obtener la matriz en forma escalonada realizamos lo siguiente:

Subproceso hacia abajo. Este proceso consta de cuatro pasos:

1. Se comienza por la primera columna de la izquierda (generalmente es una columna pivote) y se selecciona un elemento diferente de cero. Este será el primer pivote.

2. Se coloca el elemento seleccionado en el extremo superior izquierdo intercambiando, si es preciso, las filas de la matriz hasta que dicho elemento se encuentre en la posición de pivote.

3. Utilizando las operaciones elementales de filas crear ceros debajo del pivote.

4. *Tapamos* la fila (o filas si hay más de una) con la posición pivote creada en los pasos anteriores (1-3) y aplicamos los pasos 1-3 a la submatriz que nos queda (constituida por las filas restantes). Este paso se repite hasta que no queden más filas no nulas.

Para obtener la matriz en forma escalonada reducida a partir de la forma reducida obtenida mediante los pasos 1-4 debemos realizar lo siguiente:

Subproceso hacia arriba. Este proceso consta del siguiente paso:

5. Comenzando por el primer pivote de la derecha creamos, mediante operaciones elementales de filas, ceros encima del mismo. Si el pivote no es uno dividimos por su valor para que lo sea. Continuamos el proceso hacia la izquierda hasta terminar con el primer pivote de la izquierda.

B.3. Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales la podemos encontrar a partir de la matriz asociada al sistema. Para ello primero transformamos la matriz en una equivalente por filas que tenga forma escalonada o escalonada reducida. Las variables correspondientes a las columnas pivote se denominan *variables principales o básicas.* El resto de las variables se denominan *variables libres.* El significado de una variable libre es que dicha variable puede tomar cualquier valor. La solución de un sistema viene dada al escribir el valor de las variables principales, las cuales pueden venir expresadas en función de las variables libres.

Por ejemplo, consideremos la matriz del sistema (B.6). Dicha matriz representa un sistema de 5 ecuaciones con 6 incógnitas. Las variables principales serán x_1, x_2, x_5, x_6 y las libres x_3, x_4. De la forma de la matriz observamos que x_5, x_6 están completamente determinados por los términos independientes (recordar que la última columna está compuesta por los términos independientes de las ecuaciones) pero x_1, x_2 dependen tanto de los términos independiente como de las variables libres x_3, x_4. Es decir fijando diferentes valores de x_3, x_4 obtenemos diferentes valores de x_1, x_2. Por ejemplo, el sistema (x_1 depende de la variable libre x_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ tiene la solución } \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 \text{ es libre} \end{cases} \tag{B.7}$$

De todo lo anterior deducimos el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema B.2 *Un sistema de ecuaciones lineales en compatible si y sólo si la primera columna de la derecha de la matriz ampliada del sistema no es una columna pivote, o sea, no existe ninguna fila de la forma* $(0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ \alpha)$ *con* α *diferente de cero. Si el sistema es compatible entonces tiene solución única (sistema compatible determinado) si no hay ninguna variable libre y tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado) si existe al menos una variable libre.* ∎

Por ejemplo, los sistemas correspondientes a las dos matrices (B.4) son compatibles siendo el correspondiente a la primera matriz indeterminado (tiene dos variables libres) y el segundo determinado (no tiene variables libres). Por el contrario el sistema correspondiente a la matriz

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

es incompatible al ser la última columna una columna pivote, o lo que es igual, al tener la fila $(0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ \blacksquare)$ (recordar que $\blacksquare$ denotaba al elemento guía que por definición es diferente de cero).

B.4. Vectores y ecuaciones matriciales.

B.4.1. Vectores de $\mathbb{R}^n$

Un vector de $\mathbb{R}^n$ no es más que un conjunto de n números ordenados de la forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \text{donde } x_1, ..., x_n \text{ son números reales.}$$

es decir un vector es una matriz de $n \times 1$. Los valores $x_1, ..., x_n$ se denominan coordenadas (o componentes) del vector x. Diremos que dos vectores son iguales si todas sus componentes son iguales, o sea

$$x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\ ..., x_n = y_n.$$

Llamaremos vector nulo 0 al vector cuyas componentes son todas iguales a cero.

B.4.2. Operaciones con vectores.

Sean x, y, z, w vectores de $\mathbb{R}^n$ y α, β números reales. Definiremos la suma de dos vectores x e y al vector z de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son la suma de las coordenadas de x e y, o sea,

$$z = x + y \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

y definiremos la multiplicación de un vector x por un escalar (número) α al vector w cuyas componentes se obtienen al multiplicar las componentes de x por α, o sea,

$$w = \alpha\, x \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Dichas operaciones cumplen las propiedades

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x + 0 = 0 + x = x$
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ donde $(-x)$ denota al vector $(-1)\, x$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8. $1\, x = x$

Diremos que un vector x de $\mathbb{R}^m$ es combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{R}^m$ con pesos $\alpha_1, ..., \alpha_n$, números reales, respectivamente si x se expresa de la forma

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Definiremos espacio generado por los vectores $a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{R}^m$ y lo denotaremos como $\operatorname{span}(a_1, ..., a_n) = L(a_1, ..., a_n)$ al subespacio de $\mathbb{R}^m$ constituido por todos las combinaciones lineales de los vectores $a_1, a_2, ..., a_n$, es decir, al conjunto de todos los vectores de la forma

$$L(a_1, ..., a_n) = \operatorname{span}(a_1, ..., a_n) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n,$$

quienes quiera sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ números reales.

Definiremos una ecuación vectorial a la ecuación de la forma

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b,$$

donde b es un vector dado de $\mathbb{R}^m$ y $x_1,\ x_2, ..., x_n$ son las incógnitas que se quieren encontrar. Es fácil comprobar que la ecuación vectorial anterior tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada tiene la forma

$$[a_1\, a_2\, \cdots a_n\, b].$$

Además b está en $\operatorname{span}(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si el sistema $[a_1\, a_2\, \cdots a_n\, b]$ es compatible.

B.4.3. La ecuación $Ax = b$.

Sea A una matriz $m \times n$ con columnas $a_1, a_2, ..., a_n$ (vectores de $\mathbb{R}^m$) y x un vector de $\mathbb{R}^n$. Definiremos la multiplicación de una matriz A de $m \times n$ por un vector x de $\mathbb{R}^n$ al vector z de $\mathbb{R}^m$ definido por

$$z = Ax = [a_1\, a_2\, \cdots a_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$

Teorema B.3 *Sea A una matriz $m \times n$ con columnas $a_1, a_2, ..., a_n$ y b un vector de $\mathbb{R}^m$. La ecuación matricial*

$$A\,x = b$$

tiene la misma solución que la ecuación vectorial

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b,$$

la cual a su vez tiene la misma solución que el sistema cuya matriz ampliada tiene la forma

$$[a_1\, a_2\, \cdots a_n\, b].$$

■

Una consecuencia de este teorema es que la ecuación $A\,x = b$ tiene solución si y sólo si b es una combinación lineal de las columnas de A.

Teorema B.4 *Sea A una matriz $m \times n$ con columnas $a_1, a_2, ..., a_n$. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

1) Para todo b vector de $\mathbb{R}^m$, la ecuación $A\,x = b$ tiene solución.

2) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$, o sea, $\mathbb{R}^m = Span(a_1, a_2, ..., a_n)$.

3) A tiene una posición pivote en cada fila. ■

Regla para el cálculo de Ax. Para calcular la $i-$ésima componente del vector Ax (si éste está definido) tenemos que sumar los productos de la $i-$ésima fila de A por las coordenadas de x, o sea,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Teorema B.5 *Sea A una matriz $m \times n$ con columnas $a_1, a_2, ..., a_n$, x, y vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un número real cualquiera. Las siguientes propiedades son válidas:*

1) $A\,(x + y) = A\,x + A\,y$, *2) $A(\alpha\,x) = \alpha\,(A\,x)$* ■

B.4.4. Conjunto solución de los sistemas lineales.

Todo sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se puede escribir en forma matricial $Ax = b$ donde la matriz de coeficientes A es una matriz $m \times n$, x es un vector de $\mathbb{R}^n$ y b es un vector de $\mathbb{R}^m$.

1. El sistema lineal $Ax = 0$ se denomina sistema homogéneo. Dicho sistema siempre tiene la solución trivial $x = 0$. Además se cumple que el sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si el sistema tiene al menos una variable libre, o sea la matriz A tiene al menos una columna que no es pivote.

   El conjunto solución de un sistema homogéneo se escribe como el conjunto de todas las combinaciones lineales de ciertos vectores $s_1, s_2, ..., s_p$ cuyo número coincide con el de las variables libres del sistema. Para obtener los vectores $s_1, s_2, ..., s_p$ se puede hacer lo siguiente:
   1) Escribir el vector solución x expresando las variables principales en función de las libres.
   2) El vector s_1 se obtiene del vector x anterior al sustituir la primera variable libre por 1 y las demás por cero. El segundo vector s_2 se obtiene del vector x anterior al sustituir la segunda variable libre por 1 y las demás por cero. Y así sucesivamente.
   Por ejemplo si la solución x de $Ax = 0$ viene dada por (dos variables libres x_2, x_3)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{s_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{s_2}$$

2. El sistema lineal $Ax = b$ con $b \neq 0$ se denomina sistema no homogéneo.

   Teorema B.6 *Supongamos que $Ax = b$ tiene solución para cierto b de $\mathbb{R}^m$. Sea p una solución de $Ax = b$ (solución particular). Entonces el conjunto solución del sistema no homogéneo $Ax = b$ es el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^m$ de la forma*

$$x = p + x_h, \tag{B.9}$$

   donde x_h es la solución general del sistema homogéneo correspondiente $Ax_h = 0$.

B.4.5. Dependencia e independencia lineal.

Un conjunto de vectores $a_1, a_2, ..., a_n$ de $\mathbb{R}^n$ se denomina linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0,$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Un conjunto de vectores $a_1, a_2, ..., a_n$ se denomina linealmente dependiente si existen los valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0.$$

Teorema B.7 *Un conjunto $S = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*

Como consecuencia del teorema anterior se deduce que:

1) Dos vectores a_1 y a_2 son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real α tal que $a_1 = \alpha a_2$ o $a_2 = \alpha a_1$.

2) Si $a_1, a_2, ..., a_n$ son vectores linealmente dependientes y $a_1 \neq 0$ entonces para cierto $j > 1$ el vector a_j es combinación lineal de los anteriores, es decir,

$$a_j = x_1 a_1 + x_2 + a_2 + \cdots + x_{j-1} a_{j-1}.$$

NOTA: Esto no implica que si tenemos un conjunto de vectores linealmente dependientes $a_1, a_2, ..., a_n$ necesariamente cada vector es combinación de los anteriores.

Teorema B.8 *Un conjunto $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de dos o más vectores de $\mathbb{R}^m$ con $n > m$ es necesariamente un conjunto linealmente dependiente.*

Teorema B.9 *Un conjunto $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de dos o más vectores de $\mathbb{R}^m$ con alguno de los vectores $a_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes, o sea si alguno de los vectores de S es el vector nulo entonces S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

B.5. Álgebra de matrices.

Vamos a estudiar las operaciones elementales de las matrices. El elemento a_{ij} de una matriz A es el que se encuentra situado en la intercepción de la fila i con la columna j:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \text{columna } j & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \text{fila } i \ \longrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{B.10}$$

B.5.1. Suma de matrices y multiplicación por un escalar.

Sean $A = [a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$ y $B = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n]$ matrices de dimensiones $m \times n$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ y $b_1, b_2, ..., b_n$ son vectores de $\mathbb{R}^m$. Definiremos la suma de dos matrices A y B a la matriz C cuyos vectores columnas coinciden con la suma de los correspondientes vectores columnas de A y B, es decir:

$$C = A + B = [a_1\, a_2\, \cdots\, a_n] + [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n] = [a_1 + b_1\; a_2 + b_2\, \cdots\, a_n + b_n],$$

o en términos de los elementos matriciales: $C \equiv ||c_{ij}|| = ||a_{ij} + b_{ij}||$. Sea α un número real cualquiera y $A = [a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$ una matriz de $m \times n$. Definiremos el producto de una matriz por un escalar a la matriz cuyas columnas coinciden con las de A multiplicadas por α, es decir:

$$\alpha A = \alpha [a_1\, a_2\, \cdots\, a_n] = [\alpha a_1\, \alpha a_2\, \cdots\, \alpha a_n],$$

o bien $\alpha\, A \equiv \alpha ||a_{ij}|| = ||\alpha\, a_{ij}||$.

Teorema B.10 *Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y α, β números reales. Entonces:*

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + 0 = 0 + A = A$, *donde* $0 \equiv ||0||$ *es la matriz nula.*
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha\, A + \beta\, A$.
6. $\alpha(\beta\, A) = (\alpha\, \beta)\, A$.

B.5.2. Multiplicación de matrices.

Sea $A = [a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$ matriz de $m \times n$ y $B = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_p]$ de $n \times p$. Se define la matriz producto $C = A \cdot B$ a la matriz de $m \times p$ definida por:

$$A \cdot B = A[b_1\, b_2\, \cdots\, b_p] = [Ab_1\, Ab_2\, \cdots\, Ab_p], \tag{B.11}$$

o elemento a elemento:

$$||(A \cdot B)_{ij}|| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Nótese que cada columna de $A \cdot B$ es una combinación lineal de las columnas de A:

$$A \cdot B = [Ab_1\, Ab_2\, \cdots\, Ab_p] = [\sum_{k=1}^{n} b_{k1} a_k \;\; \sum_{k=1}^{n} b_{k2} a_k \;\; \cdots \;\; \sum_{k=1}^{n} b_{kp} a_k].$$

Una interpretación de la multiplicación de matrices se puede dar a partir de la composición de las aplicaciones lineales: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con matriz A de $m\times n$ y $S : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal con matriz B de $n \times p$, entonces a la aplicación $Q : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $Q(x) = T(S(x))$ (composición de T y S) le corresponde la matriz $A \cdot B$ de $m \times p$.

Teorema B.11 *Sean A de $m \times n$, B y C matrices de dimensiones apropiadas para que estén definidas las operaciones y α, β números reales. Entonces:*

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$, *donde* $0 \equiv ||0||$ *es la matriz nula.*
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
4. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
5. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$.
6. $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$, *donde* I_k *es la matriz identidad de* $k \times k$.

Es importante recordar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir para cualquiera sean las matrices A y B tenemos que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ y k es un número entero no negativo ($k = 0, 1, 2, ...$), definiremos la potencia $k-$ ésima de A por la fórmula

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ veces}} \cdot I_n, \qquad \text{donde } A^0 \equiv I_n.$$

B.5.3. Transposición de matrices.

Dada una matriz A de $m \times n$, la matriz transpuesta de A, que denotaremos por A^T, es la matriz de $n \times m$ cuyas filas coinciden con las columnas de A. Si $A = ||a_{ij}||$, entonces $A^T = ||a_{ji}||$.

Teorema B.12 *Sean A de $m\times n$, B una matriz de dimensiones apropiadas para que estén definidas las operaciones y α un número real. Entonces:*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$.
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Como consecuencia de este teorema tenemos que

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdot A_{n-1}^T \cdots A_1^T.$$

B.5.4. La inversa de una matriz cuadrada.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si existe una matriz C tal que

$$A \cdot C = I_n, \qquad C \cdot A = I_n,$$

entonces a C se le denomina matriz inversa de A y se le denota A^{-1}. Las matrices A para las cuales existe la inversa A^{-1} se denominan invertibles. Si A es invertible entonces A^{-1} es única.

Teorema B.13 *Sea A una matriz cuadrada de 2×2 invertible*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \textit{entonces} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

El número $ad - bc$ se llama determinante de la matriz A de 2×2 y se le denota por $det\, A$. Nótese que una matriz A de 2×2 tiene inversa si y sólo si $det\, A \neq 0$.

Teorema B.14 *Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ invertible. Entonces el sistema $A\,x = b$ es compatible determinado para cualquiera sea b vector de $\mathbb{R}^n$, y su solución se expresa por la fórmula $x = A^{-1}\, b$.*

Teorema B.15 *Sean A y B matrices cuadradas de $n \times n$ invertibles. Entonces:*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. A^T *es invertible y* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Como consecuencia de este teorema tenemos que

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

B.5.5. Matrices elementales.

Una matriz elemental de $n \times n$ es aquella que se obtiene al realizar una operación elemental de filas sobre la matriz identidad de $n \times n$, es decir son las que se obtienen al intercambiar dos filas, al multiplicar por una constante no nula una fila cualquiera y al reemplazar una fila por la suma de ésta mas una combinación lineal de cualquier otra. Por ejemplo, la matriz elemental correspondiente al intercambio de la 1 y 2 filas de una matriz de 3×3 será

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la que corresponde a cambiar la 3 fila por la 3 más α veces la primera será

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la que multiplica la 2 fila por el número α será

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que si multiplicamos la matriz E_1 por una matriz cualquiera A de $3 \times p$ la matriz $E_1 \cdot A$ coincide con la matriz que se obtiene a partir de A al intercambiar la 1 y 2 filas.

Análogamente, $E_2 \cdot A$ coincide con la matriz que se obtiene de A al cambiar la 3 fila por la 3 más α veces la 1 fila y $E_3 \cdot A$ coincide con la matriz que se obtiene al multiplicar por α la 2 fila. Es decir al multiplicar una matriz elemental E de $m \times m$ por A de $m \times n$ se obtiene una nueva matriz $E \cdot A$ que coincide con la matriz que se se obtiene al realizar la operación elemental sobre A y dicha matriz E se obtiene realizando sobre la matriz identidad I_m de $m \times m$ la misma operación elemental que se quiere realizar sobre A. Puesto que todas las operaciones elementales son invertibles ello implica que las matrices elementales son invertibles y la inversa de E se obtiene realizando sobre la matriz identidad I_m la operación inversa. Por ejemplo, la inversa de E_1 es E_1. La inversa de E_2 es

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la de E_3 es

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema B.16 *Una matriz cuadrada A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n de $n \times n$ en cuyo caso toda secuencia de operaciones elementales que reducen A a I_n, reducen I_n a A^{-1}.*

Ello implica que $A \sim E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I_n$. Luego $A = (E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1)^{-1}$ lo cual implica que $A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot I_n$.

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente algoritmo para calcular A^{-1}: Dada la matriz A de $n \times n$ invertible:

1. Construimos la matriz $[A\ I_n]$.
2. Reducimos por filas la matriz A a I_n, entonces $[A\ I_n] \sim [I_n\ A^{-1}]$.

Nótese que encontrar la inversa de la matriz A equivale a encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = I$, o sea, $A[b_1 \cdots b_n] = [A\, b_1 \cdots A\, b_n] = [e_1 \cdots e_n] = I_n$. Es decir es equivalente a resolver las n ecuaciones

$$A\, b_1 = e_1, \quad A\, b_2 = e_2, \quad \cdots \quad A\, b_n = e_n,$$

donde $e_1, ..., e_n$ son las columnas de la matriz identidad.

Teorema B.17 *(*Teorema de inversión de matrices*) Sea A una matriz cuadrada A de $n \times n$. Las siguientes expresiones son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n de $n \times n$. (A tiene n posiciones pivote)*
3. *A es un producto de matrices elementales.*
4. *La ecuación $A\,x = 0$ solo tiene la solución trivial. (Las columnas de A son linealmente independientes.)*
5. *La ecuación $A\,x = b$ tiene al menos una solución para cada b vector de $\mathbb{R}^n$, o sea, b es un elemento del subespacio generado por las columnas de A (la solución de $A\,x = b$ es única).*
6. *Existe un C tal que $A \cdot C = I$.*
7. *Existe un D tal que $D \cdot A = I$.*

8. A^T *es invertible.*

Una consecuencia de este teorema es que si $A \cdot B = I$ o $B \cdot A = I$, entonces A y B son invertibles y $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$.

B.6. Determinantes.

B.6.1. Definición de determinante de una matriz cuadrada.

Sea A una matriz cuadrada

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & & \text{columna } j & & & \\ & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \text{fila } i \;\rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} . \tag{B.12}$$

Denotaremos por A_{ij} a la submatriz que se obtiene a partir de A si quitamos la fila i y la columna j, o sea

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 2$). El determinante $\det\ A$ de la matriz A es la suma de los términos $\pm a_{1j} \det A_{1j}$ donde a_{1j} son los elementos de la primera fila de A y A_{1j} son las correspondientes submatrices obtenidas eliminando la fila 1 y la columna j. Más exactamente:

$$\det\ A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1} \det A_{1n}, \tag{B.13}$$

donde suponemos que $\det a = a$ si a es un número real cualquiera.

Utilizando la definición anterior obtenemos para una matriz 2×2 el resultado:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

que coincide con el determinante definido en el capítulo anterior (teorema B.13).

Usualmente a la cantidad $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ se le conoce como cofactor (o menor) asociado al elemento a_{ij}. Utilizando esta notación tenemos que la definición anterior se puede reescribir de la forma:

$$\det\ A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n},$$

que se conoce como *desarrollo del determinante de A por su primera fila.*

Teorema B.18 *Si A es de $n \times n$ entonces:*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Las dos fórmulas anteriores se conocen como desarrollo del determinante de A por su $i-$ésima fila *y* desarrollo del determinante de A por su $j-$ésima columna, *respectivamente.*

Teorema B.19 *Si A es una matriz triangular (inferior o superior) entonces* $\det A$ *es el producto de los elementos de la diagonal, o sea,* $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

B.6.2. Propiedades de los determinantes.

Los dos teoremas que enunciaremos a continuación son los más importantes de este apartado y nos permitirán calcular los determinantes de matrices de orden alto ($n \geq 4$) de manera eficiente.

Teorema B.20 *Sea A una matriz $n \times n$. Sea B una matriz que se obtiene de A al realizar sobre A alguna de las operaciones elementales de filas y sea E la matriz elemental que realiza dicha operación. Por ejemplo,*

1. *Si E_1 es la matriz que intercambia dos filas, la matriz $B = E_1 \cdot A$ se obtiene al intercambiar dos filas de A.*

2. *Si E_2 es la matriz que multiplica por una constante r no nula una fila cualquiera, la matriz $B = E_2 \cdot A$ se obtiene al multiplicar por r la correspondiente fila de A.*

3. *Si E_3 es la matriz que reemplaza una fila por la suma de ésta mas un múltiplo de cualquier otra fila, la matriz $B = E_3 \cdot A$ se obtiene al reemplazar una fila de A por la suma de ésta mas un múltiplo de cualquier otra fila.*

Entonces, $\det B = \det(E \cdot A) = \alpha \det A$ *donde* $\alpha = \begin{cases} -1 & \textit{si } E \textit{ es del tipo } E_1 \\ r & \textit{si } E \textit{ es del tipo } E_2 \\ 1 & \textit{si } E \textit{ es del tipo } E_3 \end{cases}$ *Además, si $A = I$ es la matriz identidad y por tanto* $\det I = 1$, *entonces* $\det E = \alpha$, *es decir el determinante de cualquier matriz elemental vale o -1 ó r ó 1 en dependencia si dicha matriz es del tipo E_1, E_2 o E_3, respectivamente.*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que si una fila es múltiplo de un número r entonces tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\, a_{i1} & r\, a_{i2} & \cdots & r\, a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En particular si una fila de A es nula, $\det A = 0$ y si una fila de A es proporcional a otra $\det A = 0$.

Teorema B.21 *Sea A una matriz $n \times n$ y sea A^T su traspuesta, entonces* $\det A = \det A^T$.

Este segundo teorema nos permite enunciar todos los apartados del teorema anterior cambiando la palabra *filas* por *columnas*.

Es conocido de apartados anteriores que cualquier matriz A se puede, mediante transformaciones elementales, transformar en una matriz triangular superior U (forma escalonada). Además si resulta que la matriz A tiene n filas pivote entonces el determinante de A será proporcional al $\det U$. Luego, si tenemos n filas pivote todos los pivotes son distintos de cero y $\det A \neq 0$. Pero si A tiene n filas pivote entonces A es invertible. Este razonamiento nos conduce al siguiente teorema.

Teorema B.22 *Una A $n \times n$ es invertible si y sólo si* $\det A$ *es diferente de cero.*

Teorema B.23 *Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces* $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

B.6.3. Regla de Kramer.

Sea A una matriz $n \times n$ y b un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $A_j(b)$ a la matriz en la cual la $j-$ ésima columna de A está reemplazada por el vector b, es decir si A y b son

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

entonces $A_j(b)$ es la matriz

$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & b_i & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema B.24 *Sea A matriz $n \times n$ invertible. Entonces para todo b de $\mathbb{R}^n$ el sistema*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b},$$

es compatible y tiene una única solución que viene dada por

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\det A_n(b)}{\det A}.$$

Es importante tener en cuenta que este método es ineficiente para calcular la solución de sistemas de más de 3 ecuaciones pues en el están involucrados determinantes. Es recomendable resolver los sistemas por el método de reducción de filas descrito en la primera parte del curso (ver *Algoritmo de reducción por filas*).

Finalmente, recordemos que "*invertir*" una matriz es equivalente a resolver n sistemas de ecuaciones de la forma:

$$A\,b_1 = e_1, \quad A\,b_2 = e_2, \quad \cdots \quad A\,b_n = e_n,$$

donde $e_1, ..., e_n$ son las columnas de la matriz identidad. Por tanto para calcular la $j-$ésima columna de A^{-1} tenemos que resolver el sistema $A\,x = e_j$ cuya solución es, según la regla de Kramer, $x_1 = \dfrac{\det A_1(e_j)}{\det A}, \cdots, x_n = \dfrac{\det A_n(e_j)}{\det A}$, pero

$$\det A_1(e_j) = (-1)^{1+j} \det A_{j1} = C_{j1}, \cdots, \det A_n(e_j) = (-1)^{n+j} \det A_{jn} = C_{jn},$$

luego la columna j de A^{-1} es

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{pmatrix}.$$

Todo esto nos conduce al teorema

Teorema B.25 *Sea A una matriz invertible $n \times n$. Entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1i} & C_{2i} & \cdots & C_{ji} & \ddots & C_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $C_{lm} = (-1)^{l+m}\det A_{lm}$ son los cofactores (menores) del elemento a_{lm} de la matriz A y A_{lm} es la submatriz que se obtiene al eliminar la fila l y la columna m de A. La matriz $||C_{lm}||$ se denomina matriz adjunta de A.

Es importante notar que este método es ineficiente para calcular inversas (recurre a la regla de Kramer que es ineficiente es si misma) por lo que es recomendable para encontrar A^{-1} aplicar el algoritmo descrito en el teorema B.16 del capítulo anterior.

Para concluir esta parte dedicada a determinantes veamos una propiedad interesante que satisfacen los determinantes y que es consecuencia de los teoremas B.18 y B.20:

Sea $A = [a_1\, a_2 \cdots a_n]$ una matriz de $n \times n$ con columnas $a_1, ..., a_n$. Definamos la aplicación lineal:

$$T(x) = \det([a_1 \cdots x \cdots a_n]) = \det A_k(x), \qquad x \text{ de } \mathbb{R}^n, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

La aplicación anterior es lineal pues para todo α de $\mathbb{R}$ y x, y de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} T(\alpha\, x) &= \det([a_1 \cdots \alpha\, x \cdots a_n]) = \alpha \det([a_1 \cdots x \cdots a_n]) = \alpha\, T(x), \\ T(x+y) &= \det([a_1 \cdots x+y \cdots a_n]) = \det([a_1 \cdots x \cdots a_n]) + \det([a_1 \cdots y \cdots a_n]) = \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Esta propiedad se conoce como la multilinealidad del determinante

B.7. Espacios Vectoriales.

En esta sección vamos a definir los espacios vectoriales que son la generalización de los espacios $\mathbb{R}^n$ ya estudiados.

B.7.1. Definición y ejemplos.

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual están definidas las operaciones *suma "+"* de dos elementos x, y de V y *multiplicación* "$\cdot$" de un escalar (número real) α por un elemento de V. Diremos que V es un espacio vectorial si se cumplen las siguientes propiedades (axiomas): Sean x, y, z elementos arbitrarios de V y α, β números reales. Entonces V es un espacio vectorial si

1. Para todos x e y, *vectores* de V, el vector suma, $w = x + y$, también es un vector de V y se cumple que:

a) $x + y = y + x$

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

c) Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$

d) Existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$ donde $(-x)$ es vector opuesto de x

2. Para todo x *vector* de V, el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar, $w = \alpha \cdot x$, también es un vector de V y se cumple que:

a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

d) $1 \cdot x = x$

Ejemplos.
1.) El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la definida en la sección 2.
2.) El conjunto de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la definida en la sección 3. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^{m\times n}$
3.) El conjunto de los polinomios de grado a lo sumo n, que denotaremos por $\mathbb{P}_n$, o sea,

$$\mathbb{P}_n = \{p_n(t) = a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n, \quad a_0, ..., a_n \text{ números reales.}\},$$

donde definiremos la suma de dos polinomios y la multiplicación por un escalar de la siguiente forma:

$$p(t) = a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n, \qquad q(x) = b_0 + b_1\,t + \cdots + b_n\,t^n,$$

$$(p + q)(t) \equiv p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

$$(\alpha \cdot p)(t) \equiv \alpha\, p(t) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n.$$

Además, $p_n = 0$, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. 4.) El conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $C_{[a,b]}$, cuando la suma de dos funciones f y g y la multiplicación por un escalar α están dadas por

$$(f + g)(t) \equiv f(t) + g(t), \qquad (\alpha \cdot f)(t) \equiv \alpha\ \cdot f(t).$$

B.7.2. Subespacios vectoriales.

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones *suma "+"* y *multiplicación "·"* que V.

Ejemplos.
1.) Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2.) Para $V = C_{[a,b]}$, $H = \mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial, para cualquier $n = 0, 1, 2, ...$ entero.
3.) Para $V = \mathbb{P}_n$, $H = \mathbb{P}_k$ es un subespacio vectorial para todo $k < n$.

Teorema B.26 *Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones.*

1. *El elemento nulo de V pertenece a H.*

2. *Para todos x e y,* vectores *de H, el vector $w = x + y$ también es un vector de H.*

3. *Para todos* x vector *de* H*, el vector* $w = \alpha \cdot x$ *también es un vector de* H*.*

Teorema B.27 *Dado un conjunto de vectores* $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de un espacio vectorial* V*, el conjunto* $\text{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de* V*. Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores* $v_1, v_2, ..., v_p$*.*

B.7.3. Conjuntos linealmente independientes. Bases.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de un espacio vectorial V se denomina linealmente independiente si la ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0,$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ se denomina linealmente dependiente si existen los valores $x_1, x_2, \cdots, x_p$ no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Para estudiar la dependencia lineal de los vectores de V podemos utilizar los mismos teoremas estudiados en la sección 2 cambiando los espacios $\mathbb{R}^n$ por los correspondientes espacios vectoriales V. Por tanto las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. *Un conjunto* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los demás.*

2. *Un conjunto* $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *de dos o más vectores de* V *con alguno de los vectores* $v_i = 0$ $(1 \le i \le p)$ *es necesariamente un conjunto de vectores linealmente dependientes, o sea si alguno de los vectores de* S *es el vector nulo entonces* S *es un conjunto de vectores linealmente dependientes.*

3. *Dos vectores* v_1 *y* v_2 *de* V *son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales, es decir, si existe un número real* α *tal que* $v_1 = \alpha v_2$ *o* $v_2 = \alpha v_1$

Teorema B.28 *El conjunto de dos o más vectores* $v_1, v_2, ..., v_p$ *de* V *con* $v_1 \neq 0$ *es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si para cierto* j*,* $1 < j < p$*, el vector* v_j *es combinación lineal de los anteriores, es decir,*

$$v_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_{j-1} v_{j-1}.$$

NOTA: Esto no implica que si tenemos un conjunto de vectores linealmente dependientes $v_1, v_2, ..., v_p$ necesariamente cada vector es combinación de los anteriores.

Los vectores linealmente independientes de un espacio vectorial juegan un papel fundamental en el estudio de los sistemas lineales gracias a la siguiente definición

Dado un subespacio vectorial H del espacio vectorial V diremos que el conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) B es un conjunto de vectores linealmente independientes

ii) $H = Span(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Por ejemplo, si tomamos una matriz $n \times n$ invertible, entonces sus columnas $a_1, ..., a_n$ son linealmente independientes y además $\mathbb{R}^n = Span(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de

$\mathbb{R}^n$. En particular, si $A = I_n$, la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son una base de $\mathbb{R}^n$ la cual se conoce como base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Otro ejemplo lo constituye el conjunto de vectores $S = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$. Es fácil comprobar que dichos vectores son linealmente independientes y que $\text{span}\,(1, t, t^2, ..., t^n) = \mathbb{P}_n$. S se conoce como la base canónica de $\mathbb{P}_n$.

Teorema B.29 *Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V y sea $H = Span(v_1, v_2, ..., v_p)$ un subespacio de V.*

i) Supongamos que un vector de S, digamos el v_j, $1 \leq j \leq p$, es combinación lineal de los restantes. Entonces si suprimimos a dicho vector v_k del conjunto S, H no cambia, o sea,

$$H = Span(v_1, ..., v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, ..., v_p) = \text{span}\,(v_1, ..., v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_p).$$

ii) Si H no es el espacio $\{0\}$, entonces algún subconjunto de S es una base de H.

Este teorema nos dice que a partir de un conjunto de vectores que generan un espacio vectorial siempre es posible "extraer" una base de dicho espacio vectorial. Por ejemplo, consideremos el espacio generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = Span\,[v_1, v_2, v_3]\,.$$

Es evidente que $H = Span[v_1, v_2, v_3] = \text{span}\,[v_1, v_2]$ pues el tercer vector es combinación lineal de los dos anteriores. Además, $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ no es una base de H pues v_1, v_2, v_3 no son linealmente independientes. Sin embargo, el conjunto $B = \{v_1, v_2\}$ que se obtiene al suprimir el tercer elemento si que es una base de H.

B.7.4. Sistemas de coordenadas.

Cuando estudiamos el espacio $\mathbb{R}^n$ (sección 2) definimos a los vectores de $\mathbb{R}^n$ mediante sus coordenadas. Ello era evidente pues

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n.$$

Además, es evidente que dado un vector x de $\mathbb{R}^n$ sus coordenadas, es decir los valores $x_1, ..., x_n$, son únicos. El siguiente teorema generaliza este resultado para cualquier espacio vectorial V.

Teorema B.30 *Sea $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ una base del espacio vectorial V. Entonces para todo x de V existe un único conjunto de valores $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ tal que*

$$x = \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n.$$

Este teorema nos permite definir las coordenadas de un vector cualquiera de un espacio vectorial V.

Supongamos que $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ es una base del espacio vectorial V. Denominaremos coordenadas del vector x de V en la base B al conjunto de los valores $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ tales que

$$x = \alpha_1\, b_1 + \alpha_2\, b_2 + \cdots + \alpha_n\, b_n,$$

y lo denotaremos por $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B$ o $[x]_B$.

Consideremos nuevamente las coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Como vimos al principio de este apartado los elementos de cualquier vector X de $\mathbb{R}^n$ coinciden con las coordenadas de dicho vector en la base canónica $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Supongamos ahora que pasamos a una nueva base $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Entonces

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \alpha_1b_1 + \cdots + \alpha_nb_n = [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B = P_{CB} \cdot [x]_B,$$

y por tanto, si las coordenadas de x en la base canónica C son $x_1, ..., x_n$, la siguiente relación será cierta:

$$[x]_C = P_{CB} \cdot [x]_B,$$

donde P_{CB} es la matriz de cambio de base B en C que pasa las coordenadas de un vector en la base B a las escritas en C. Nótese que las columnas de la matriz P_{CB} coinciden con los vectores de la nueva base escritos en la base canónica. Es evidente que la matriz P_{CB} es invertible (todas sus columnas son independientes y por tanto el $\det P_{CB} \neq 0$) por tanto la matriz inversa P_{CB}^{-1} será la matriz de cambio de base de base canónica a la base B, o sea

$$[x]_B = P_{CB}^{-1} \cdot [x]_C = P_{BC} \cdot [x]_C.$$

B.7.5. La dimensión de un espacio vectorial.

Hemos visto que cualquier espacio V con una base de n elementos es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Resulta que dicho número n es una propiedad intrínseca de V, su dimensión.

Teorema B.31 *Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente.*

Este teorema es una generalización del teorema B.8.

Teorema B.32 *Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.*

Un espacio vectorial es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos, es decir si $V = Span(b_1, ..., b_n)$, donde $B = \{b_1, ..., b_b\}$ es una base de V y lo escribiremos de la forma $\dim V = n$. En el caso que $V = \{0\}$ sea el espacio vectorial nulo, $\dim\{0\} = 0$. Si V no puede ser generado por una base finita de vectores, entonces diremos que V es de dimensión infinita y lo denotaremos por $\dim V = \infty$.

Por ejemplo, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, $\dim C_{[a,b]} = \infty$.

Teorema B.33 *Sea H un subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita V, ($\dim V = n < \infty$). Entonces todo conjunto de vectores linealmente independientes de H se puede ampliar hasta convertirlo en una base de H. Además $\dim H \leq \dim V$.*

Teorema B.34 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional ($\dim V = n < \infty$) y sea $S = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ un conjunto de exactamente n vectores. Entonces:*

a) Si S es un conjunto de vectores linealmente independientes, S es una base de V.

b) Si S genera a todo V, es decir si $V = Span(b_1, b_2, ..., b_n)$, S es una base de V.

B.7.6. Cambio de base.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y sea $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ y $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$ dos bases de V. Como D es una base de V y los elementos de B son elementos de V, éstos se podrán escribir en la base D, o sea,

$$\begin{array}{c} b_1 = a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \cdots + a_{1n}d_n, \\ \vdots \\ b_k = a_{k1}d_1 + a_{k2}d_2 + \cdots + a_{kn}d_n, \\ \vdots \\ b_1 = a_{n1}d_1 + a_{n2}d_2 + \cdots + a_{nn}d_n. \end{array} \quad \Longrightarrow \quad b_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}_D, \cdots, b_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}_D.$$

Supongamos que las coordenadas de un vector x de V en la base B son $x_1, x_2, ..., x_n$ y en la base D son $y_1, y_2, ..., y_n$, es decir,

$$x = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n \longrightarrow [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B, \text{ y } x = y_1d_1 + \cdots + y_nd_n \longrightarrow [x]_D = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_D,$$

Entonces tenemos que

$$[x]_D = [x_1b_1 + \cdots + x_nb_n]_D = x_1[b_1]_D + \cdots x_n[b_n]_D = ([b_1]_D\,[b_2]_D \cdots [b_n]_D)[x]_B.$$

Es decir si conocemos como se expresan los vectores de la base B en la base D podemos encontrar la matriz de cambio de base B en D, cuyas columnas $a_1, a_2, ..., a_n$ no son más que las coordenadas de los vectores de la base B escritos en la base D. Por tanto tenemos que $[x]_D = P_{DB}[x]_B$, o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{k2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{kn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B.$$

Además, P_{DB} es una matriz invertible (sus columnas son linealmente independientes), luego existe la inversa P_{DB}^{-1} la cual es la matriz de cambio de base D en B, o sea,

$$[x]_B = P_{DB}^{-1}[x]_D.$$

B.8. El problema de autovalores de una matriz.

Sea A una matriz de $n \times n$. Denominaremos al vector x de $\mathbb{R}^n$, autovector de A asociado al autovalor λ, al vector no nulo $x \neq 0$, tal que

$$A\,x = \lambda\,x, \qquad x \neq 0. \tag{B.14}$$

Es fácil comprobar que si x es un autovector asociado al autovalor λ, entonces el sistema

$$(A - \lambda\,I)x = 0, \qquad \text{donde } I \qquad \text{es la matriz identidad } n \times n, \tag{B.15}$$

tiene soluciones no triviales. Por tanto, dado un autovalor λ de A, el conjunto de los autovectores asociados a λ, que coincide con una base del núcleo de A, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Dicho espacio se denomina *autoespacio* de A correspondiente al autovalor λ. Es importante destacar que conocido el autovalor λ, encontrar el autoespacio consiste en encontrar las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones, o sea, resolver $(A - \lambda\,I)x = 0$.

Teorema B.35 *Sea A una matriz triangular de $n \times n$. Entonces los autovalores de A coinciden con los elementos de la diagonal principal $\lambda = a_{ii}$, $i = 1, 2, .., n$.*

Es importante destacar que las operaciones elementales de filas cambian los autovalores de una matriz. Es decir si U es la forma escalonada de A los autovalores de A y U son, en general, distintos.
Teorema B.17 (*Teorema de inversión de matrices*, conclusión.) Sea A una matriz cuadrada A de $n \times n$. Las siguientes expresiones son equivalentes:

1. A es invertible.

2. $\lambda = 0$ no es un autovalor de A

El teorema anterior es evidente pues si $\lambda = 0$ es autovalor de A, entonces $A\,x = 0$ tiene que tener soluciones no triviales y por tanto A no puede ser invertible.

Teorema B.36 *Sea A una matriz de $n \times n$ que tiene p autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$. Entonces los autovectores $v_1, v_2, ..., v_p$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ son linealmente independientes.*

B.8.1. La ecuación característica.

¿Cómo calcular los autovalores? La respuesta a esta pregunta no es difícil pues los autovalores λ son tales que el sistema (B.15), $(A - \lambda\,I)x = 0$, tiene soluciones no triviales. Pero un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\det(A - \lambda\,I) = 0. \tag{B.16}$$

La ecuación anterior se denomina *ecuación característica* de A. Lo anterior lo podemos resumir como:

Un número λ es un autovalor de la matriz A de $n \times n$ si y sólo si λ satisface la ecuación característica de A (B.16), $\det(A - \lambda\,I) = 0$.

Es fácil comprobar que la expresión $\det(A - \lambda\,I) = 0$ es un polinomio de grado n en λ. Por tanto el polinomio $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda\,I)$ se denomina polinomio característico de A y los autovalores de A serán las raíces de dicho polinomio. O sea, λ es un autovalor de A si y sólo si $p_n(\lambda) = 0$.

Matrices similares. Sean A y B dos matrices $n \times n$. Diremos que A es similar a B si existe una matriz invertible P, tal que

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}, \qquad \text{o} \qquad B = P^{-1} \cdot A \cdot P. \tag{B.17}$$

Es evidente que si A es similar a B, B es similar a A, para demostrarlo es suficiente tomar $Q = P^{-1}$. Por tanto diremos simplemente que las matrices A y B son *similares* si se cumple (B.17). La transformación que a cada matriz le hace corresponder otra similar, o sea, $A \longrightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P$, se denomina transformación de similitud.

Teorema B.37 *Si las matrices A y B de $n \times n$ son similares, entonces tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos autovalores.*

B.8.2. Diagonalización de matrices.

Una matriz A de $n \times n$ es *diagonalizable* si A es similar a una matriz diagonal D, o sea, si existe una matriz P invertible y otra D diagonal, tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Teorema B.38 *Una matriz A de $n \times n$ es* diagonalizable *si y sólo si A tiene n autovectores linealmente independientes. Si $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde D es diagonal y P invertible, entonces los elementos de la diagonal de D son los autovalores de A y las columnas de P son los correspondientes autovectores.*

Este teorema se puede reformular diciendo que A es *diagonalizable* si y sólo si sus autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Algoritmo para diagonalizar una matriz A.

1. Encontrar los autovalores de A resolviendo la ecuación (B.16).
2. Encontrar los autovectores linealmente independientes correspondientes a cada uno de los autovalores calculados en el paso 1. Si tenemos en total n autovectores linealmente independientes entonces el teorema B.38 nos asegurará que nuestra matriz es diagonalizable, si no hay n autovectores independientes entonces A no es diagonalizable y detenemos el proceso. Si A es diagonalizable continuamos como sigue.
3. Construimos la matriz P cuyas n columnas son los n autovectores linealmente independientes.
4. Construimos la matriz diagonal D cuyos elementos de la diagonal coinciden con los autovalores de A. Es importante colocar en cada columna de D el autovalor asociado al autovector de la correspondiente columna de P.

Es recomendable comprobar que hemos calculado correctamente P y D. Para ello comprobamos que $A \cdot P = P \cdot D$.

Teorema B.39 *(Condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable I)*
Si una matriz A de $n \times n$ tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

Teorema B.40 *(Condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable II)*
Sea A una matriz de $n \times n$ con p autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$. Sea B_k, $k = 1, 2, ..., p$ una base del correspondiente autoespacio asociado al autovalor λ_k y sea n_k la dimensión de dicho autoespacio. Construyamos el conjunto de vectores que contiene a todos los conjuntos B_k, o sea

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p, \qquad \dim(B) = n_1 + n_2 + \cdots + n_p.$$

Entonces B es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes. Además, A es diagonalizable si y sólo si $\dim(B) = n$, o sea, si B contiene exactamente n vectores.

C. Anexo: Series de potencias

Definición C.1 *Dada una sucesión de números complejos $(a_n)_n$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ definiremos serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{C.1}$$

que denominaremos serie de potencias.

Como casos especiales de las series de potencias tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

etc. Si la serie converge para todos los valores de z de cierto conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces podemos definir la función suma $f(z)$ de la serie.

C.1. Propiedades de las series de potencias

Sin pérdida de generalidad vamos a considerar las series del potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{C.2}$$

es decir, cuando $z_0 = 0$. Obviamente si tenemos una serie de potencias del tipo (C.1), la podemos reducir a a la anterior (C.2) haciendo el cambio de variables $\zeta = z - z_0$ y viceversa.

Teorema C.2 *Primer Teorema de Abel para las series de potencias*
Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$. Si la serie converge para cierto $w \in \mathbb{C}$, entonces la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |w|$.

La región de convergencia de una serie de potencias siempre son círculos en el plano complejo que, en el caso de las series de la forma (C.2) están centrados en el origen y en el de las series (C.1), en z_0 (ver la figura 20). Nótese que se obtiene una de la otra al hacer una traslación en el plano complejo del círculo mediante el vector z_0. Además, cualquiera sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n, $z \in \mathbb{C}$, existe un número real no negativo $R \geq 0$ ó $R = +\infty$ tal que para todo z con $|z| < R$ la serie converge y si $|z| > R$ la serie diverge. Dicho número se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias.

Consideremos ahora en caso real, es decir cuando $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales y $z = x \in \mathbb{R}$. En este caso hay que trasladar los resultados a la recta real. El primer teorema de Abel quedaría entonces de la siguiente forma

Teorema C.3 *Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n, $x \in \mathbb{R}$. Si la serie converge para cierto $r \in \mathbb{R}$, entonces absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < |r|$.*

A diferencia del caso complejo, en el caso real si se sabe la convergencia en alguno de los extremos, se puede saber mucho más sobre la serie.

Teorema C.4 *Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n, $x \in \mathbb{R}$ y R su radio de convergencia. Entonces, si la serie converge en $x = R$ ($x = -R$), converge* uniformemente *en $[0, R]$ ($[-R, 0]$).*

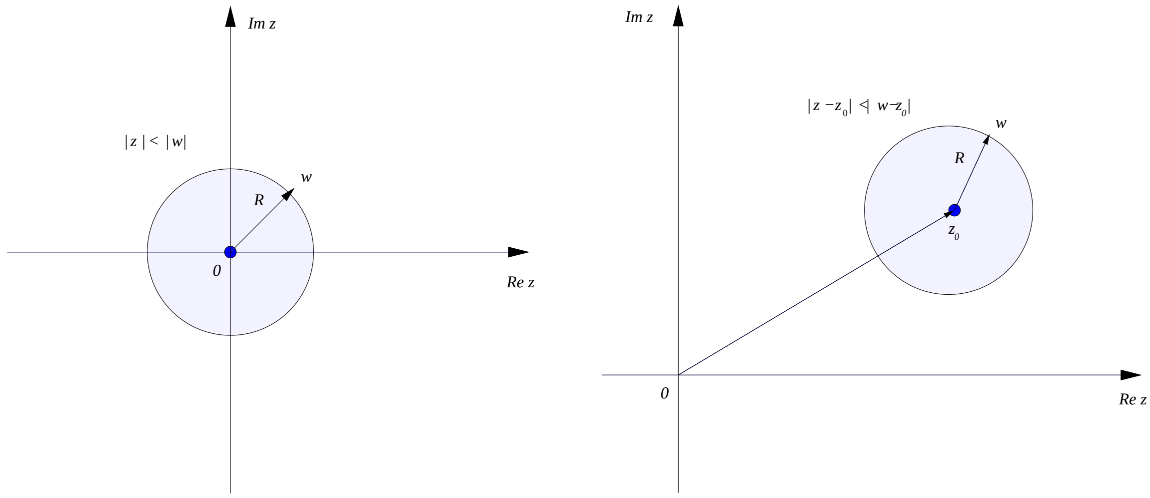


Figura 20: Región de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (izquierda) y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (derecha).

Teorema C.5 *(Cauchy-Hadamard)*
Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n, $x \in \mathbb{R}$. *Entonces* $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, *si dicho límite existe.*

Una condición suficiente para que exista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ es que exista el límite $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$, en cuyo caso

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Para las series de potencias en $\mathbb{R}$ tienen lugar las siguientes propiedades.

Teorema C.6 *La función* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *es continua en* $(-R, R)$, *siendo* R *el radio de convergencia de la serie.*

En otras palabras, toda serie de potencias con radio de convergencia no nulo define una función continua.

Teorema C.7 *Derivación e integración término a término de una serie de potencias real*
Sea la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n, $x \in \mathbb{R}$ *con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces*

1. *La serie se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que*

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

2. *La serie se puede derivar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Una consecuencia trivial del último teorema es que una serie de potencias define una función infinitas veces derivable en $(-R, R)$.

Ejemplo C.8 *Probar que la función* $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *es continua y derivable en* $\mathbb{R}$ *y calcular su derivada.*

Que es continua y derivable en $\mathbb{R}$ es evidente de los dos teoremas anteriores a tener, como ya hemos calculado antes, radio de convergencia $+\infty$. Para calcular la derivada usamos el teorema anterior, así pues

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f(x).$$

Además, $f(0) = 1$. La función que cumple lo anterior es la función e^x.

Los teoremas anteriores permiten calcular un buen número de series, por ejemplo

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Para ello notamos que

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Esta serie converge en $(-1, 1)$, así que integrando término a término tenemos

$$\log(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}.$$

Funciones elementales del análisis.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{C.3}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{C.4}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!}x^k, \qquad x \in (-1, 1), \tag{C.5}$$

en particular

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \qquad x \in (-1, 1). \tag{C.6}$$

Aplicando la integración término a término en $[0, x]$ tenemos

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}. \tag{C.7}$$

Usando (C.6) haciendo el cambio x por x^2 obtenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}, \qquad x \in (-1, 1), \tag{C.8}$$

a partir de la cual, integrando término a término en $[0,x]$ obtenemos

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1,1). \tag{C.9}$$

Escojamos ahora (C.5) con $\alpha = -\frac{1}{2}$ y cambiemos x por $-x^2$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} x^k, \qquad x \in (-1,1), \tag{C.10}$$

de donde integrando término a término en $[0,x]$ obtenemos

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}, \qquad x \in (-1,1), \tag{C.11}$$