



UNIVERSIDAD DON BOSCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

ASIGNATURA: MATEMATICA TECNICA
CICLO I/2008

GUIA DE EJERCICIOS : MATRICES Y DETERMINANTES

*"Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica.
Esa fuerza es la voluntad."
(Albert Einstein)*

OBJETIVOS: Que el estudiante al resolver esta guía se capaz de:

- Identificar los diferentes tipos de matrices.
- Aplicar el concepto de igualdad de matrices para resolver ecuaciones matriciales.
- Efectuar las distintas operaciones con matrices.
- Calcular el determinante de una matriz de orden dos.
- Calcular el determinantes de una matriz de orden tres por el método de Sarrus.
- Resolver sistemas de ecuaciones utilizando el método de Cramer.

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 & -4 \\ -11 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5] \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a. ¿Cuáles son los tamaños de A, B, C y D?
- b. Encuentre $a_{14}, a_{21}, a_{31}, a_{43}$
- c. Halle b_{13}, b_{31}, b_{43}
- d. Identifique la matriz fila. ¿Cuál es su transpuesta?
- e. Identifique la matriz columna. ¿Cuál es su transpuesta?
- f. Identifique la matriz cuadrada. ¿Cuál es su transpuesta?

2. Refiérase a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- a. ¿Cuáles son los tamaños de A, B, C y D?
- b. Explique por qué no existe la matriz A+C
- c. Calcule A+B
- d. Calcule 2A-3B
- e. Calcule C-D
- f. Calcule 4D-2C

3. Efectúe las operaciones indicadas:

a.
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

c.
$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -9 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 0.06 & 0.12 \\ 0.43 & 1.11 \\ 1.55 & -0.43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.77 & -0.75 \\ 0.22 & -0.65 \\ 1.09 & -0.57 \end{bmatrix}$$

4. Determine u, x, y, z a partir de la ecuación matricial.

a.
$$\begin{bmatrix} 2x-2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & y-2 \\ 2z & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & u & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2u & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & z \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z & 10 \\ 4 & -u \end{bmatrix}$$

5. Encuentre la transpuesta de la matriz.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. A continuación se dan los tamaños de las matrices A y B. Halle el tamaño de AB y BA siempre que estos productos estén definidos.

- A es de tamaño 2×3 y B es de tamaño 3×5
- A es de tamaño 3×4 y B es de tamaño 4×3
- A es de tamaño 1×7 y B es de tamaño 7×1
- A es de tamaño 4×4 y B es de tamaño 4×4

7. Halle condiciones sobre el tamaño de una matriz C de modo que C^2 (es decir CC) esté definido.

8. Calcule los productos indicados:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e. $2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

f. $3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

h. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

j. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, muestre que $A^2=0$. Compare esto con la ecuación $a^2=0$ donde a es un número real.

10. Halle la matriz B tal que $B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. *Sugerencia:* Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcule $(A+B)^2$
- Calcule $A^2 + 2AB + B^2$
- Con base en los resultados de a) y b), muestre que, en general, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

12. Siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $X+2B=3C$

13. Escriba el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

<p>a. $2x - 3y = 7$ $3x - 4y = 8$</p> <p>$x - 2y + 3z = -1$</p> <p>d. $3x + 4y - 2z = 1$ $2x - 3y + 7z = 6$</p>	<p>b. $2x = 7$ $3x - 2y = 12$</p> <p>$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$</p> <p>e. $2x_1 - x_2 - x_3 = 2$ $-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$</p>	<p>c. $2x - 3y + 4z = 6$ $2y - 3z = 7$ $x - y + 2z = 4$ $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10$</p> <p>f. $4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12$ $-x_1 + x_3 = -2$</p>
--	---	--

14. En los siguientes ejercicios calcule el determinante:

<p>a. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$</p>	<p>b. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$</p>	<p>c. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$</p>
<p>d. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$</p>	<p>e. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$</p>	<p>f. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$</p>
<p>g. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$</p>	<p>h. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$</p>	<p>i. $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$</p>
<p>j. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$</p>	<p>k. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$</p>	<p>l. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix}$</p>

15. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de Cramer:

<p>a. $x - 3y = -1$ $4x + 3y = 11$</p>	<p>b. $2x - 4y = 5$ $3x + 2y = 6$</p>	<p>c. $x + 4y = 7$ $\frac{1}{2}x + 2y = 5$</p>
<p>d. $3x - 4y = 7$ $9x - 12y = 14$</p>	<p>e. $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $2x_1 - x_2 - x_3 = 2$ $-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$ $3x + 7y - 8z = 5$</p>	<p>f. $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10$ $4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12$ $-x_1 + x_3 = -2$ $-y + 2z = 6$</p>
<p>g. $\frac{5}{4}x - \frac{2}{3}y = 3$ $\frac{1}{4}x + \frac{5}{3}y = 6$</p>	<p>h. $x + 3z = -2$ $4x - 3y = 7$</p>	<p>i. $2x + 2y - 8z = 7$ $3y + 4z = 0$</p>

$$\begin{aligned} \text{j.} \quad & 7a + b = 3 \\ & -2b + 14a = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k.} \quad & 0.2x + 5y = 7 \\ & 0.3x + 0.4y = 3.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l.} \quad & \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ & 3y - \frac{x}{14} = 26 \\ \text{o.} \quad & 5w + 7z = 6 \\ & 2w - 3z = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m.} \quad & w + z = 0 \\ & 3w + 2z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n.} \quad & 7x + 9y = 42 \\ & 12x + 10y = -4 \end{aligned}$$

16. Despeje x de lo siguiente:

$$\text{a.} \quad \begin{vmatrix} x & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\text{b.} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 15$$

$$\text{c.} \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$17. \text{ Demuestre que } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$$

18. Para qué valores de m, el determinante de la siguiente matriz es cero?

$$\begin{vmatrix} m-2 & 1 & 0 \\ 4 & m+1 & 0 \\ 3 & -2 & m-4 \end{vmatrix}$$