INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN

"Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama."
Aristóteles

- **Interpolación**

Consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que se conocen los valores en los extremos.

- **Extrapolación**

Consiste en hallar un dato fuera del intervalo conocido, con la condición de que dicho dato esté próximo a uno de sus extremos para que el resultado obtenido sea fiable.

El problema en la interpolación y extrapolación se presenta cuando se da una función de la cual solo se conocen una serie de puntos de la misma:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1).....(x_n, y_n)$$

Objetivo:
Encontrar una función cuya gráfica pase por esos puntos y que nos sirva para estimar los valores deseados. A dicha función se le conoce como ***Polinomio Interpolador***, una vez obtenida su expresión, dando valores en él se pueden encontrar nuevos puntos considerando estos resultados como *estimaciones aproximadas.*

- **Interpolación Lineal**

Se dirá lineal cuando se tomen dos puntos y la fórmula a aplicar es:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

- **Interpolación Cuadrática**

Se dirá cuadrática cuando se tomen tres puntos y se utiliza la fórmula de Lagrange:

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_0 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}$$

Nótese que las dos fórmulas son igualmente aplicables para extrapolación.

Dependiendo del caso concreto a estudiar, a veces la naturaleza del problema permite darnos una idea de cuál es la interpolación (o extrapolación) más conveniente. Por ejemplo, si los incrementos de la función son proporcionales a los de la variable independiente (o casi proporcionales) se puede usar la interpolación lineal.

Ejemplo:

De una función conocemos tres puntos (-3,5), (1,-1) y (3,11). Hallar el polinomio interpolador.

Solución:

Como nos dan tres puntos el polinomio interpolador será de segundo grado teniendo la forma ax^2+bx+c. Dicho polinomio pasará por esos puntos.

Así tenemos:

$$x_0 = -3 \qquad y_0 = 5$$
$$x_1 = 1 \qquad y_1 = -1$$
$$x_2 = 3 \qquad y_2 = 11$$

Luego, sustituimos en la fórmula:

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_0-x_1)}$$

$$y = y_0 \frac{(x-1)(x-3)}{(-3-1)(-3-3)} + y_1 \frac{(x+3)(x-3)}{(1+3)(1-3)} + y_2 \frac{(x+3)(x-1)}{(3+3)(3-1)}$$

$$y = \frac{5}{24}(x-1)(x-3) + \frac{1}{8}(x+3)(x-3) + \frac{11}{12}(x+3)(x-1)$$

$$y = \frac{5}{24}(x^2-4x+3) + \frac{1}{8}(x^2-9) + \frac{11}{12}(x^2+2x-3)$$

$$y = \frac{5}{24}x^2 - \frac{20}{24}x + \frac{15}{24} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8} + \frac{11}{12}x^2 + \frac{22}{12}x - \frac{33}{12}$$

Simplificando términos semejantes se tiene entonces:

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \frac{5}{4}x^2 + x - \frac{13}{4} \\ o \\ y = \frac{1}{4}(5x^2 + 4x - 13) \end{array}}$$

Este polinomio permite conocer la forma del gráfico que pasa por los tres puntos y analizar que sucede si x=0 y si x=10, esto se deja como ejercicio.